П. В. Шнурков, **Р. В. Мельников** (Москва, МГИЭМ). **Оптимальное управление запасом непрерывного продукта по отношению к функционалу средних удельных затрат.**

Рассмотрим стохастическую модель управления запасом, исследованную в работе [1], при наличии дополнительного предположения о том, что на время поставки потребление товара со склада не прекращается, а продолжается с той же постоянной скоростью $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$. Напомним, что поставка товара происходит не мгновенно, а с задержкой h, зависящей от объема продукта, израсходованного к моменту заказа: $h = h(\alpha t)$, где αt — количество продукта, потребленного со склада за время t.

Поведение системы описывается регенерирующим случайным процессом. Целью управления является минимизация функционала средних удельных затрат

$$C(G(\cdot)) = \int_0^\infty A(t + h(\alpha t))\, dG(t) \Big/ \int_0^\infty (t + h(\alpha t))\, dG(t), \tag{1}$$

где

$$A(t+h(\alpha t)) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{t+h(\alpha t)} c_1(\tau - \alpha x)\, dx, & 0 < t + h(\alpha t) < \tau/\alpha, \\ \displaystyle\int_0^{\tau/\alpha} c_1(\tau - \alpha x)\, dx & \\ \qquad \displaystyle + \int_{\tau/\alpha}^{t+h(\alpha t)} c_2(\tau - \alpha x)\, dx, & \tau/\alpha \leqslant t + h(\alpha t) < \infty. \end{cases} \tag{2}$$

На основе теоретических результатов об экстремуме дробно-линейных функционалов можно показать, что

$$\min_{G(\cdot)\in\Omega} C(G(\cdot)) = \min_{G(\cdot)\in\Omega^*} C(G(\cdot)) = \min_{t>0} I(t), \tag{3}$$

где Ω^* — множество вырожденных функций распределения, и задача (3) сводится к поиску экстремума заданной функции

$$I(t) = \frac{A(t + h(\alpha t))}{t + h(\alpha t)} \to \min_{t>0}. \tag{4}$$

Для экстремальной задачи в (4) доказано следующее важное утверждение.

Теорема. *Пусть $c_1(x)$, $c_2(x)$ — неотрицательные дифференцируемые функции затрат, $c_1(x)$ не убывает, определена для $x \geqslant 0$, $c_1(x) = 0$ для $x < 0$; $c_2(x)$ не возрастает, определена для $x \leqslant 0$, $c_2(x) = 0$ для $x > 0$; $c_1(0) = c_2(0) = 0$; $h(\alpha t)$ — неубывающая неотрицательная дифференцируемая функция от t, $h(0) = 0$. Пусть также $\lim_{x\to-\infty} c_2(x) = +\infty$.*

Тогда решение экстремальной задачи (4) находится из уравнения

$$c_2(\tau - \alpha(t + h(\alpha t)))(t + h(\alpha t)) - \int_0^{\tau/\alpha} c_1(\tau - \alpha x)\, dx - \int_{\tau/\alpha}^{t+h(\alpha t)} c_2(\tau - \alpha x)\, dx = 0, \tag{5}$$

причем решение уравнения (5) существует, принадлежит интервалу t: $\tau/\alpha < t + h(\alpha t) < \infty$; если же функция $c_2(x)$ является строго монотонной (убывающей), то решение (5) существует и единственно.

Предположим дополнительно, что функции, выражающие удельные затраты на хранение и штрафы, связанные с дефицитом, носят линейный характер, т.е. задаются формулами

$$c_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ px, & x \geqslant 0, \end{cases} \qquad c_2(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ -sx, & x \leqslant 0, \end{cases} \qquad p, s > 0.$$

Будем также предполагать, что $h(\alpha x) = h_0 \alpha x$, $h_0 > 0$. Тогда решение задачи определяется следующей явной формулой:

$$t^* = \frac{\tau}{\alpha(1 + \alpha h_0)} \sqrt{\frac{p + s}{s}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шнурков П.В.*, *Мельников Р.В.* Оптимальное управление запасом непрерывного продукта в модели регенерации. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, в. 3, с. 434–452.