

И. А. М и т р о ф а н о в, А. А. М и т р о ф а н о в, С. А. Х р у с т а л е в (Ульяновск, УлГУ). **Оптимальное управление наблюдениями траекторий случайных блужданий.**

Изучению случайного блуждания уделяется большое внимание. Многие процессы можно описать с помощью случайного блуждания (например, движение заряженных частиц в полупроводнике, развитие болезни у живых существ).

Рассмотрим случайное блуждание в непрерывном времени: $X_t = A_t - B_t$, где A_t и B_t — пуассоновские процессы с компенсаторами, равными соответственно: $\tilde{A}_t = \lambda t$, $\tilde{B}_t = \mu t$.

Пусть случайное блуждание описывает изменение у больного некоторого параметра крови, по которому можно судить о протекании и развитии болезни. Чем точнее известны траектории изменения исследуемого параметра, тем эффективнее может быть воздействие. Для этого необходимо как можно чаще проводить обследование больного. Очевидно, это может быть дорого и быть помехой. Но если проводить исследование крови редко, то ясной картины болезни не получается. Поэтому возникает задача определения оптимальной частоты обследований. В математических терминах — это вопрос об оптимальном управлении наблюдениями траекторий случайных блужданий.

Процесс наблюдений за случайным блужданием описывается следующим образом: $Z_t = \int_0^t (X_{s-} - Z_{s-}) d\pi_s$, где π_t — пуассоновский процесс, считающий количество обследований, с компенсатором: $\tilde{\pi}_t = \gamma t$.

При увеличении интенсивности процесса π_t процесс Z_t все лучше приближает случайное блуждание. Но если интенсивность чересчур высока, то будет высок и функционал потерь, если он учитывает плату за частоту обследований. Такой функционал потерь имеет вид $f(\gamma) = E(Z_t - X_t)^2 + \gamma$.

Задача состоит в том, чтобы минимизировать функционал потерь с помощью выбора оптимального значения интенсивности процесса π_t :

$$f(\gamma) = \min_{\gamma}. \quad (1)$$

Компьютерное стохастическое имитационное моделирование показало, что оптимальное решение существует, причем получившийся экстремум ярко выражен.

Утверждение. Пусть $\lambda = \mu$, тогда $f(\gamma) = (2\lambda e^{\gamma t} - 2\lambda + \gamma^2 e^{\gamma t}) / (\gamma e^{\gamma t})$ и решение задачи (1) находится из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \gamma}(f(\gamma)) = \frac{-2\lambda e^{\gamma t} + 2\lambda + 2\lambda \gamma t + \gamma^2 e^{\gamma t}}{\gamma^2 e^{\gamma t}} = 0$$

численными методами (аналитического решения не имеет).

Доказательство утверждения проводится семимартингальными методами.

Авторы выражают благодарность своему научному руководителю А. А. Бутову за внимание к работе.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 06-01-00338а.