

А. А. М и т р о ф а н о в, И. А. М и т р о ф а н о в, А. А. В о л к о в
(Ульяновск, УлГУ). **Оценивание параметров разладок процессов с финитными носителями.**

В работе, представленной данным сообщением, рассматривается динамика изменения показателей наблюдаемых объектов популяции. Отслеживание каждого объекта происходит по некоторому показателю в течение жизни или за время проведения эксперимента. При описании популяции на основе процессов размножения и гибели формируется пространство непрерывных траекторий (реализаций) процессов-показателей, «начинающихся» («рождающихся») и «заканчивающихся» («умирающих») в различные моменты времени. В представленной работе интенсивности появления объектов не зависят от количества «живых» объектов, а выбытие происходит в каждый момент времени с экспоненциальным распределением. Также в каждый момент «жизни» объекта с определенной вероятностью может произойти его «разладка», которая начинает влиять на динамику изменения наблюдаемого показателя объекта. Для такой схемы построены оценки параметров.

Итак, для $k \geq 1$ рассматриваются объекты вида

$$X_t^k = X_{\tau^k}^k + \int_{\tau^k}^t dW_s^k + \alpha \int_{\theta^k}^t ds, \quad \tau^k \leq t \leq \sigma^k,$$

где τ^k — моменты «рождений», а σ^k — моменты «смерти» объектов.

Момент рождения объекта задается следующим образом:

$$\tau^k = \inf\{t: t > 0, \pi_t = k\} \quad \text{для всех } k \geq 1,$$

где π_t — пуассоновский процесс с компенсатором $\hat{\pi}_t = \lambda t$, $\lambda > 0$.

Начальное значение показателя ($X_{\tau^k}^k$), с которым объект рождается — равномерно распределенные случайные величины: $X_{\tau^k}^k \sim R[A, B]$, $A, B > 0$, $A < B$. Компонента $\int_{\tau^k}^k dW_s^k$ описывает динамику изменения показателя k -го объекта при «нормальной жизни», т. е. поведения без «разладки», где W_s^k — независимые стандартные винеровские процессы. И, наконец, третья компонента $\alpha \int_{\theta^k}^t ds$ моделирует «разладку» объекта ($\alpha > 0$). Вероятность ее появления задается уравнением (при $\beta > 0$): $\mathbf{P}\{\theta^k \leq t | F_{\tau^k}\} = 1 - \exp\{-\beta(t - \tau^k)^+\}$. Распределение моментов «смерти» объектов экспоненциально с показателем $\mu > 0$; $\mathbf{P}\{\sigma^k \leq t | F_{\tau^k}\} = 1 - \exp\{-\mu(t - \sigma^k)^+\}$.

Утверждение. Оценка параметра λ имеет вид $\hat{\lambda}(t) = \pi_t/t$ и является состоятельной, несмещенной и эффективной. Оценки параметров α , β , μ , A и B имеют вид

$$\hat{\alpha}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} I\{\sigma^j \leq t\} I\{\theta^j \in (\tau^j, \sigma^j)\} (X_{\sigma^j}^j - X_{\theta^j}^j) / \sum_{j=1}^{\infty} I\{\sigma^j \leq t\} I\{\theta^j \in (\tau^j, \sigma^j)\} (\sigma^j - \theta^j),$$

$$\hat{\beta}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} I\{\sigma^j \leq t\} I\{\theta^j \in (\tau^j, \sigma^j)\} / \sum_{j=1}^{\infty} I\{\theta^j \in (\tau^j, \sigma^j)\} (\theta^j - \tau^j),$$

$$\hat{\mu}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} I\{\sigma^j \leq t\} / \sum_{j=1}^{\infty} (\sigma^j - \tau^j) I\{\sigma^j \leq t\},$$

$$\hat{A}(t) = \min\{X_{\tau^k}^k, \tau^k \leq t\}, \quad \hat{B}(t) = \max\{X_{\tau^k}^k, \tau^k \leq t\}.$$

При этом оценки $\hat{\alpha}(t)$, $\hat{\beta}(t)$, $\hat{\mu}(t)$, $\hat{A}(t)$ и $\hat{B}(t)$ являются состоятельными.

Несмещенными оценками с наименьшими дисперсиями для параметров A и B будут соответственно

$$\hat{A}^*(t) = \frac{n(t)\hat{A}(t) - \hat{B}(t)}{n(t) - 1}, \quad \hat{B}^*(t) = \frac{n(t)\hat{B}(t) - \hat{A}(t)}{n(t) - 1},$$

где $n(t) = \sum_{j=1}^{\infty} I\{\tau^j < t\}$.

Доказательство проводится семимартингальными методами.

Авторы выражают благодарность профессору А. А. Бутову за внимание к работе.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проекты № 06-01-00338а, № 08-01-97009р_Поволжье_а.