

А. В. Н е к л ю д о в (Москва, МГТУ). Поведение решения полулинейного эллиптического уравнения второго порядка с экспоненциальной нелинейностью в цилиндре.

Рассматривается полулинейное эллиптическое уравнение второго порядка с переменными коэффициентами вида $Lu = e^u$ в полубесконечном цилиндре, удовлетворяющее на боковой поверхности цилиндра однородному условию Неймана. Ранее во многих работах рассматривалось уравнение Гаусса $\Delta u = e^u$. В [1], [2] было показано, что решение задачи Неймана для уравнения Гаусса в цилиндре стремится к $-\infty$ с линейной либо логарифмической скоростью. В [3] изучались младшие члены асимптотики решений уравнения Гаусса в цилиндре. Поведение решений уравнения Гаусса в других неограниченных областях рассмотрено в [4], [5].

В n -мерном цилиндре $\Omega = (0, +\infty) \times \hat{\Omega}$ рассмотрим уравнение эллиптического типа

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = e^u, \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \hat{x}) \in \mathbf{R}_x^n$, $\hat{\Omega}$ — ограниченная область из $\mathbf{R}_{\hat{x}}^{n-1}$, имеющая липшицеву границу; $a_{ij}(x)$ — измеримые функции в Ω , $a_{ij} = a_{ji}$, $\lambda_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda_2 |\xi|^2$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2 = \text{const} > 0$.

На боковой поверхности цилиндра $\Gamma = (0, \infty) \times \partial \hat{\Omega}$ задано краевое условие Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} \Big|_{\Gamma} \equiv \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_j \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

где $\vec{\nu} = (0, \nu_2, \dots, \nu_n)$ — единичная внешняя нормаль к Γ .

Под решениями (1)–(2) в Ω будем понимать обобщенные решения по С. Л. Соболеву.

Получен следующий основной результат.

Теорема. Пусть $u(x)$ — решение (1)–(2) в Ω . Тогда $u(x)$ ведет себя одним из двух возможных способов:

- 1) $Ax_1 \leq u(x) \leq Bx_1$ при $x_1 \geq t_0 = \text{const} > 0$, где постоянные $A, B < 0$ не зависят от x_1 ;
- 2) $-2 \ln x_1 - M \leq u(x) \leq -2 \ln x_1 + N$ при $x_1 \geq t_0$, где постоянные $M, N > 0$ не зависят от x_1 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Об асимптотике решений нелинейных эллиптических уравнений. — Успехи матем. наук, 1993, т. 48, № 4, с. 184–185.
2. Oleinik O. A. Some asymptotic problems of the theory of partial differential equations. Lezioni Lincei: Accademia Naz. dei Lincei. Cambridge University Press, 1995.
3. Насруллаев А. И. Об асимптотике решений задачи Неймана для уравнения $\Delta u - e^u = 0$ в полубесконечном цилиндре. — Успехи матем. наук, 1995, т. 50, № 3, с. 161–163.
4. Олейник О. А. Об уравнении $\Delta u + k(x)e^u = 0$. — Успехи матем. наук, 1978, т. 33, № 2, с. 204–205.
5. Насруллаев А. И. Об одном классе нелинейных уравнений в неограниченных областях. Успехи матем. наук, 1996, т. Успехи матем. наук, т. 51, № 5, с. 161.