

А. А. Б у т о в, К. О. Р а в о д и н (Ульяновск, УлГУ). **Средняя длина финитного носителя очереди в системе массового обслуживания с размножающимися заявками.**

Настоящая работа посвящена анализу длин очередей в системах массового обслуживания с двумя особенностями: первая — очередей в системе может быть много, а не одна, вторая — заявки в очередях могут размножаться. Рассмотрим вероятностную модель такой системы массового обслуживания как систему с финитными носителями процессов очередей. Для этого зададим считающий процесс числа «рождений» $B = (B_t)_{t \geq 0}$. При этом моменты рождений β^k каждой отдельной очереди определяются как: $\beta^k = \inf(t : t \geq 0, B_t = k)$. Считающий процесс числа «гибелей» очередей обозначен $D = (D_t)_{t \geq 0}$. При этом δ^k — момент гибели k -й очереди равен первому моменту обращения ненулевой очереди в нулевое состояние, и $\delta^k = \beta^k + \lambda^k$, где λ^k — продолжительность «жизни» k -й очереди P -п. н. финитна (т. е. финитна длина носителя процесса длины очереди).

Заметим, что δ^k является моментом гибели k -й очереди, а k -й скачок D_t соответствует k -й «гибели» чего бы то ни было в системе, и $\delta^k \neq k$ -му скачку D_t в общем случае (например, если 1-я очередь «переживает» последующие, и момент ее гибели поэтому заведомо «позже» их моментов гибели, то 1-й скачок D_t соответствует моменту гибели какой-то очереди из числа тех, что 1-я очередь «пережила» и, следовательно, 1 — скачок D_t не равен δ^1).

Рассмотрим $\forall k \geq 1$ q_t^k длины k -х очередей: $q_t^k = A_t^k + R_t^k - S_t^k$, где R_t^k — точечные процессы чистого размножения с компенсаторами $\tilde{R}_t^k = \int_0^t \rho \cdot q_s^k ds$, S_t^k — процессы обслуживания с компенсаторами $\tilde{S}_t^k = \int_0^t \sigma \cdot q_s^k ds$. При этом ρ — скорость размножения, σ — скорость обслуживания (уровень иммунитета) предполагаются такими, что носители очередей P -п. н. финитны: $\sigma > \rho$. Частота (интенсивность) появления очередей предполагается постоянной $\tilde{B}_t = \mu \cdot t$.

Обозначим $N_t^k = I(q_t^k \geq 1)$ — индикатор того, что очередь «жива». Он равен 1, если $q_t^k \geq 1$, т. е. на носителе k -й очереди. Следовательно, λ^k — длина k -го носителя равна $\lambda^k = \int_0^\infty N_s^k ds$, и справедлива следующая

Теорема. В случае $\sigma > \rho$ (т. е. при финитности носителей) для всех $k \geq 1$

$$E\lambda^k = \frac{1}{\rho} \ln \frac{1}{1 - \frac{\rho}{\sigma}}$$

Доказательство теоремы проводится семимартингальными методами на основе рекуррентных выражений для локальных времен случайного блуждания q_t^k .

Описанные системы могут служить математическими моделями таких явлений и объектов, которые раньше были плохо формализованы математически. Кроме того, предлагаемое математическое описание удобно для компьютерных стохастических имитационных моделей. В качестве объектов для приложений могут служить: множественные ионные процессы в различных средах, зарождение и уничтожение свободных радикалов в клетке, зарождение центров опухолеобразования и уничтожение опухолей, распространение и уничтожение в организме различных вирусов или бактерий, распространение и уничтожение в компьютерных сетях компьютерных вирусов и многое другое.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 06-01-00338 и 08-01-97009.