

М. А. Волков, К. О. Равадин (Ульяновск, УлГУ). Анализ динамики численности популяции в терминах СМО с финитными носителями процессов очередей.

В настоящей работе предлагается анализ системы массового обслуживания с множественными очередями. При этом еще одной особенностью является возможность «размножения» заявок в очередях. Такую систему назовем СМО с финитными носителями процессов очередей (см. [1–2]).

Пусть  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  — считающий процесс числа «рождений» заявок (новых опухолей) в системе. При этом моменты рождений каждой отдельной очереди обозначены  $\beta^k : \beta^k = \inf(t : t \geq 0, B_t = k)$ . Частота (интенсивность) появления очередей предполагается постоянной, а компенсатор процесса числа «рождений» заявок определен как  $\tilde{B}_t = \mu \cdot t$  с  $\mu > 0$ .

Если  $\delta^k$  — моменты гибели каждой  $k$ -ой очереди, то они равны первым моментам обращения ненулевых очередей в нулевое состояние, и  $\delta^k = \beta^k + \lambda^k$ , где  $\lambda^k$  — продолжительности «жизни»  $k$ -ых очередей. Условие  $E\lambda^k < \infty$  обеспечивает  $\mathbf{P}$ -п. н. финитность носителей очередей.

Предполагается, что заявки в очередях могут «размножаться» (деление опухолевых клеток в микроопухолях):  $\forall k \geq 1$  длина  $k$ -ой очереди  $q_t^k$  равна

$$q_t^k = A_t^k + R_t^k - S_t^k,$$

где  $R_t^k$  — процесс чистого размножения с компенсатором  $\tilde{R}_t^k = \int_0^t \rho \cdot q_s^k ds$  и  $S_t^k$  — обслуживание заявок (процесс иммунной «чистки») с компенсатором  $\tilde{S}_t^k = \int_0^t \sigma \cdot q_s^k ds$ . При этом  $\rho$  — скорость размножения заявок в очереди,  $\sigma$  — скорость обслуживания (уровень иммунитета) предполагаются такими, чтобы обеспечить финитность носителей очередей  $\mathbf{P}$ -п. н.:  $\sigma > \rho$ .

Пусть  $N_t^k = I(q_t^k \geq 1)$  — индикатор того, что очередь «жива». Процесс равен 1, если  $q_t^k \geq 1$ , т. е. только на носителе  $k$ -ой очереди. Следовательно,  $N_t = \sum_{k=1}^{\infty} N_t^k$  — число всех носителей в момент  $t \geq 0$ .

Справедлива следующая

**Теорема.** Среднее число очередей в каждый момент времени  $t \geq 0$  (в случае  $\sigma > \rho$ , обеспечивающим финитность носителей) при  $N_0 = 0$  равно

$$EN_t = \frac{\mu}{\sigma} \cdot (1 - e^{-\sigma t}), \quad \sigma = \frac{\rho}{\ln\left(\frac{1}{1-\rho/\sigma}\right)}$$

Доказательство теоремы проводится семимартингальными методами на основе рекуррентных вычислений средних длин носителей финитных очередей и средних значений числа заявок в классической линейной системе массового обслуживания.

Предложенные системы служат основой математического описания таких объектов, как число очагов опухолевых перерождений при воздействии больших доз канцерогенов.

Авторы выражают благодарность профессору А. А. Бутову за внимание к работе. Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 06-01-00338, 08-01-97009-р-поволжье\_а, 08-01-97010-р-поволжье\_а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутов А. А., Волков М. А., Волков А. А. Стохастическая модель возникновения и развития опухоли в условиях разладки параметров. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, в. 3, с. 477–478.
2. Бутов А. А., Волков М. А. Одна задача о разладке для процессов с траекториями с финитными носителями. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 1, с. 73–74.