Н. О. Седова (Ульяновск, УлГУ). **Неавтономная модель взаимодействия биологических видов с неограниченным запаздыванием: условия сходимости решений при отсутствии положительного равновесия.**

Рассмотрим неавтономную систему Лотки–Вольтерра вида [1]:

$$\dot{x}_i(t) = b_i(x_i(t))f_i(t, x_t) = b_i(x_i(t))\Bigg[r_i(t) - a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{l_{ij}} b_{ijl}(t)x_j(t - \tau_{ijl}(t))$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{0} b_{ij}(t,s)x_j(t+s)\,ds\Bigg], \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $t \in \mathbf{R}^+ = [0, +\infty)$, $\dot{x}_i(t)$ обозначает производную функции $x_i(t)$, x_t обозначает функцию, отображающую $\mathbf{R}^- = (-\infty, 0]$ в $\mathbf{R}^n$ по формуле $x_t(s) = x(t+s)$. Предполагается, что $b_i(x_i)$ — непрерывные функции, $b_i(0) = 0$, $b_i(x_i) > 0$ при $x_i > 0$, $\int_1^{+\infty} du/b(u) = +\infty$; $r_i(t)$, $a_i(t)$, $b_{ijl}(t)$ — непрерывные ограниченные функции, $a_i(t) > 0$ для $t \in \mathbf{R}^+$; $\tau_{ijl}(t) \in C(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+)$, $\dot{\tau}_{ijl}(t) < 1$; $b_{ij}(t,s)$ — непрерывны, $|b_{ij}(t,s)| \leqslant \widetilde{b}_{ij}(s)$ и $\int_{-\infty}^{0} \widetilde{b}_{ij}(s)\,ds < B_{ij} < \infty$.

Начальные условия для системы (1) имеют вид:

$$x_{t_0} = \varphi, \quad \varphi \in C(\mathbf{R}^-, \mathbf{R}^n) \text{ ограничена}, \varphi_i(s) > 0 \text{ для } s \in \mathbf{R}^-, \quad i = 1, \ldots n. \tag{2}$$

Системы вида (1)–(2) широко используются в моделировании динамики взаимодействующих биологических видов. Очевидно, система (1) допускает нулевое положение равновесия. Обычно при изучении асимптотического поведения подобных моделей предполагается наличие еще и положительного равновесия в системе, которое исследуется на устойчивость. Тем не менее, и в том случае, когда такого равновесия не существует, можно получить условия, при которых решения системы будут иметь конечный предел. Приведем один из таких результатов.

Рассмотрим систему (1) в допустимом фазовом пространстве [2] $C_g^0 = \{\varphi \in C(\mathbf{R}^-, \mathbf{R}^n)\colon\ \sup_{s\in\mathbf{R}^-} |\varphi(s)|/g(s) < \infty,\ \lim_{s\to-\infty} |\varphi(s)|/g(s) = 0\}$, где $g\colon\ \mathbf{R}^- \to [1, +\infty)$ — непрерывная невозрастающая функция, $g(s) = 1$ при $s \in [-\rho, 0]$, $g(s) \to +\infty$ при $s \to -\infty$, и $\int_{-\infty}^{0} \widetilde{b}_{ij}(s)g(s)\,ds < B_{ij}$, $|\cdot|$ обозначает норму в $\mathbf{R}^n$, а норма в C_g^0 определяется формулой $|\varphi|_g = \sup_{s\in\mathbf{R}^-} |\varphi(s)|/g(s)$.

Предположим, что существует такой постоянный положительный вектор $K = (K_1, \ldots, K_n)$, что $f_i(t, K) + k_i(t) = 0$ для некоторых неположительных функций $k_i(t) \in L_1$. Тогда, используя пару Ляпунова–Разумихина [3]

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} V_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\int_{K_i}^{x_i}\frac{du}{b_i(u)},$$

$$W(t, \varphi) = \sum_{i=1}^{n} W_i(t, \varphi_i) = \sum_{i=1}^{n}\max\Big\{\max_{-\tau(t)\leqslant s\leqslant 0} V_i(\varphi_i(s)), V_i(|\varphi_i|_g)\Big\},$$

можно показать, что при условиях

$$a_i(t) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{l_{ij}} |b_{ijl}(t)| - \sum_{j=1}^{n} B_{ij} \geqslant \varepsilon > 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

для всех решений $x(t)$ системы (1), для которых $x_{t_0} > K$, выполняется неравенство $x(t) > K$ при всех $t \geqslant t_0$ и $x(t) \to K$ при $t \to +\infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 08–01–97010р-Поволжье-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bereketoglu H.*, *Györi I.* Global asymptotic stability in a nonautonomous Lotka–Volterra type system eith infinite delay. — J. Math. Anal. Appl., 1997, v. 210, p. 279–291.
2. *Murakami S.*, *Naito T.* Fading memory spaces and stability properties for functional differential equations with infinite delay. — Funkcialaj Ekvasioj, 1989, v. 32, p. 91–105.
3. *Седова Н. О.* К методу Ляпунова–Разумихина для уравнений с бесконечным запаздыванием. —Дифф. уравнения, 2002, т. 10, с. 1338–1347.