

Б. И. С е л и в а н о в (Москва, МИРАН). **О некоторых статистиках в схеме случайных табличных размещений.**

Рассмотрим случайные равновероятные размещения частиц по клеткам таблицы T , имеющей N строк и M столбцов. Частицы размещаются независимо друг от друга. Пусть $\mu_0^{(r)} = \mu_0^{(r)}(n, N, M)$ — случайная величина (с. в.), равная числу строк T , в которых после размещения n частиц имеется ровно r пустых клеток, $r = 0, 1, \dots, M$. В случае $r = M$ распределение с. в. $\mu_0^{(r)}$ совпадает с распределением с. в. $\mu_0 = \mu_0(n, N)$ в классической задаче о дробинках.

С использованием известных результатов для рандомизированных разделимых статистик полиномиальной схемы (см. [1], [2]) доказаны следующие предельные теоремы, относящиеся к с. в. $\mu_0^{(r)}$.

Теорема 1. Если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \alpha > 0$, $M \geq 1$ фиксировано, то имеет место сходимость

$$\frac{1}{\sqrt{N}\sigma_n} \left(\mu_0^{(r)} - N m_r \right) \Rightarrow N(0, 1),$$

где стрелка $\Rightarrow$ означает сходимость с. в. по распределению, $N(0, 1)$ — стандартная нормальная с. в. и

$$m_r = \binom{M}{r} e^{-\alpha r/M} (1 - e^{-\alpha/M})^{M-r},$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 &= \binom{M}{r} e^{-\alpha r/M} (1 - e^{-\alpha/M})^{M-r} - \left(\binom{M}{r} \right)^2 e^{-2\alpha r/M} (1 - e^{-\alpha/M})^{2(M-r)} \\ &\quad - \alpha \left(\binom{M-1}{r} - \binom{M}{r} (1 - e^{-\alpha/M}) \right) e^{-2\alpha r/M} (1 - e^{-\alpha/M})^{2M-2r-2}. \end{aligned}$$

В частном случае $r = M - 1$ получено более сильное утверждение.

Теорема 2. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \alpha > 0$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{D} \mu_0^{(M-1)}}} \left(\mu_0^{(M-1)} - \mathbf{E} \mu_0^{(M-1)} \right) \Rightarrow N(0, 1),$$

где $\mathbf{E} \mu_0^{(M-1)} = N m(1 + o(1))$, $\mathbf{D} \mu_0^{(M-1)} = N \sigma^2(1 + o(1))$. Здесь $m = M e^{-\alpha} (e^{\alpha/M} - 1)$, $\sigma^2 = M e^{-2\alpha} [e^{(1+1/M)\alpha} - e^\alpha + 2M(1 - (1-1/M)\alpha) e^{\alpha/M} - M(1 + (1-1/M)^2\alpha) e^{2\alpha/M} - M(1 + \alpha)]$, если $M \geq 1$ фиксировано, и $m = \alpha e^{-\alpha}$, $\sigma^2 = \alpha e^{-\alpha} [1 - (1 - \alpha + \alpha^2) e^{-\alpha}]$, если $M \rightarrow \infty$.

Теорема 3. Если $M \geq 1$ фиксировано, а $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n e^{-\alpha r/M} \rightarrow \lambda > 0$, то $\mu_0^{(r)} \rightarrow \Pi(\lambda)$, где $\Pi(\lambda)$ — пуассоновская с. в. с параметром $\lambda = \binom{M}{r} \lambda$.

Теорема 4. Пусть $n, N, M \rightarrow \infty$ так, что разность $M - r = k$ остается постоянной и выполняются условия

$$\frac{1}{M} \ln N \rightarrow 0, \quad \frac{N}{k!} \left(\frac{n}{N} \right)^k e^{-n/N} \rightarrow \lambda > 0.$$

Тогда $\mu_r^{(0)} \Rightarrow \Pi(\lambda)$.

Теорема 5. Пусть $n, N, M \rightarrow \infty$ так, что выполняются условия

$$\frac{\ln N}{\sqrt{M}} \rightarrow 0, \quad \exp \left\{ -\frac{n}{NM} \right\} = \frac{1}{M} \ln \left(\frac{N}{\lambda(1 + o(1))} \right), \quad \lambda = \text{const.}$$

Тогда $\mu_r^{(0)} \Rightarrow \Pi(\lambda)$.

Частный случай теоремы 5 при $N = M$ другим способом доказан в дипломной работе С.П.Нестеренко, выполненной под руководством автора. Метод, использованный в работе, представленной данным сообщением, аналогичен методу, примененному в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке программы РАН «Современные проблемы теоретической математики».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов В. А., Лапин С. А.* Об асимптотической нормальности рандомизированных разделимых статистик. — Матем. заметки, 1985, т. 34, № 5, с. 745–756.
2. *Быков С. И.* Предельная пуассоновская теорема для одного вида рандомизированных статистик в полиномиальной схеме. — В сб.: Вероятностные задачи дискретной математики. М.: МИЭМ, 1980, с. 53–58.
3. *Михайлов В. Г., Селиванов Б. И.* О некоторых статистиках в схеме размещения частиц по клеткам двумерной таблицы. — Труды по дискретной математике. Т. 4. М.: Физматлит, 2001, с. 169–176.