

М. М. Семенова (Самара, СГЭУ). **Наблюдаемость многотемповых систем.**

Рассматривается модель наблюдаемого процесса:

$$\prod_{k=0}^i \varepsilon_k \dot{x}_i = f_i(x_0, x_1, \dots, x_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + B_i(x_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)u, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$\omega = \phi(x_0, x_1, \dots, x_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n),$$

где $x_i \in X_i \subset \mathbf{R}^{n_i}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) — переменные состояния, соответствующие различным темпам движения, x_0 — медленная переменная, x_n — самая быстрая переменная, $u \in U \subset \mathbf{R}^r$ — управляющие воздействия, $\omega \in V \subset \mathbf{R}^p$ — измеряемая координата, $f_i \in \mathbf{R}^{n_i}$, $\phi \in \mathbf{R}^p$ — векторные функции, B_i — матричные функции соответствующих размерностей, $i = 0, 1, \dots, n$, ε_l — малые положительные параметры, $\varepsilon_l \in (0, \varepsilon_l^0]$, $l = 1, \dots, n$, $\varepsilon_0 = 1$, $t \in \mathbf{R}$.

Предположим, что для системы (1) выполняются условия 1)–3), 1^1)– 3^1), $\dots$, 1^{n-1})– 3^{n-1}), приведенные в работе [1, с. 13–14]. Предположим также, что функции B_i , $i = 0, 1, \dots, n$, и ϕ равномерно непрерывны и ограничены с достаточным числом частных производных по всем аргументам при $t \in \mathbf{R}$, $\varepsilon_l \in (0, \varepsilon_l^0]$, $l = 1, \dots, n$. Произведем гладкую замену переменных:

$$x_0 = v_0 + \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j,$$

$$x_i = v_i + h_i + \sum_{j=i+1}^n \prod_{k=i+1}^j \varepsilon_k H_i^j, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$x_n = v_n + h_n,$$

где $h_n = h_n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $H_0^1 = H_0^1(v_0, v_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $h_1 = h_1(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $h_i = h_i(v_0 + \sum_{j=1}^i \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j, v_1 + h_1 + \sum_{j=2}^i \prod_{k=2}^j \varepsilon_k H_1^j, \dots, v_{i-1} + h_{i-1} + \varepsilon_i H_{i-1}^i, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $H_i^j = H_i^j(v_0 + \sum_{l=1}^{j-1} \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^{j-1} \prod_{k=2}^l \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{j-1} + h_{j-1} + \varepsilon_j H_{j-1}^j, v_j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $j = 2, \dots, n$, $i = 0, \dots, j-1$, и полагая $H_l^n = H_l^n(v_0, v_1, \dots, v_l, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)v_n$, $l = 0, 1, \dots, n-1$, получим систему

следующего вида:

$$\begin{aligned}
\dot{v}_0 &= F_0(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \tilde{B}_0 \left(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^n \varepsilon_k H_0^n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \right) u, \\
\varepsilon_1 \dot{v}_1 &= F_1(v_0, v_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \tilde{B}_1 \left(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^n \varepsilon_k H_0^n, v_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \right) u, \\
\prod_{k=1}^i \varepsilon_k \dot{v}_i &= F_i(v_0, v_1, \dots, v_i, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \tilde{B}_i \left(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \right. \\
&\quad \left. \dots, \prod_{k=1}^n \varepsilon_k H_0^n, v_1, \dots, v_i, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \right) u, \quad i=2, \dots, n-1, \\
\prod_{k=1}^n \varepsilon_k \dot{v}_n &= F_n(v_0, v_1, \dots, v_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \\
&\quad + \tilde{B}_n \left(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^n \varepsilon_k H_0^n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \right) u, \\
\omega &= \Phi(v_0, v_1, \dots, v_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n).
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь функции F_i , $\tilde{B}_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, определяются теми же соотношениями, что и в работе [1, с. 15–16], причем $\underbrace{F_l(0, 0, \dots, 0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)}_{l+1} \equiv 0$, $l = 1, \dots, n$, а функция Φ определяется следующим образом:

$$\Phi = \phi \left(v_0 + \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j, \dots, v_i + h_i + \sum_{j=i+1}^n \prod_{k=i+1}^j \varepsilon_k H_i^j, \dots, v_n + h_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \right).$$

Линейная модель системы (2) в окрестности начала координат имеет вид

$$\prod_{k=0}^n \varepsilon_k \dot{v}_i = A_i v_i + \bar{B}_i u, \quad \omega = \sum_{i=0}^n C_i v_i, \quad v_i(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

где

$$\begin{aligned}
A_i &= \frac{\partial F_i}{\partial v_i}(0, \dots, 0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \quad \bar{B}_i = \tilde{B}_i(0, \dots, 0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \\
C_i &= \frac{\partial \Phi}{\partial v_i}(0, \dots, 0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \quad i = 0, 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Задача наблюдаемости системы (1) сведена к задаче наблюдаемости системы (2). Для системы (2) сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема. Рассмотрим модель (2) наблюдаемого процесса в $\mathbf{R}^{n_0+n_1+\dots+n_n}$. Пусть функции F_i , $\tilde{B}_i$, Φ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $v_i = 0$, $u = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, с входными сигналами $u(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ в $\mathbf{R}^r$, $0 \leq t \leq 1$, и выходными сигналами $\Phi(v_0(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), v_1(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \dots, v_n(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ в $\mathbf{R}^p$. Предположим также, что

- 1) $F_0(0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 0$, $\Phi(0, \dots, 0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 0$;
- 2) $\text{rank}(C'_i, A'_i C'_i, \dots, (A'_i)^{n_i-1} C'_i) = n_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда существуют такие $\varepsilon_i^* > 0$, что при всех $\varepsilon_i \in (0, \varepsilon_i^*]$, $\varepsilon_i^* \leq \varepsilon_i^0$, $i = 0, 1, \dots, n$, система (2) локально вполне наблюдаема в окрестности начала координат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Семенова М. М.* Декомпозиция многотемповых моделей управляемых систем. — Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия, 2002, № 4 (26), с. 13–22.