

А. П. К и р п и ч н и к о в, А. С. Т и т о в ц е в (Казань, КГТУ). Методика оптимальной организации систем массового обслуживания с отказами и очередью.

Математическая модель СМО с отказами и очередью в квазистационарном режиме функционирования, сочетающая в себе многоканальную модель Эрланга ($M|M|m|0$), классическую модель многоканальной СМО ($M|M|m$), а также модель многоканальной СМО с ограниченной очередью ($M|M|m|E$), приводится в работе [1]. Основными параметрами модели являются: λ_1 — средняя интенсивность потока заявок, которые обслуживаются при любых обстоятельствах; λ_2 — средняя интенсивность потока заявок, для которых действует ограничение по длине очереди — не более E заявок; λ_3 — средняя интенсивность потока заявок, которые обслуживаются только при наличии свободного обслуживающего устройства; μ — средняя интенсивность обслуживания заявок одним обслуживающим устройством; m — число обслуживающих устройств. Принятые обозначения:

$$\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu}, \quad i = 1, 2, 3, \quad R = \frac{\Lambda}{\mu}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Имитационное моделирование СМО данной архитектуры в системе GPSS World показало, что выходной поток обслуженных заявок является неравномерным. При произвольно заданных значениях числа обслуживающих устройств m и емкости накопителя E и известных в качестве исходных данных интенсивностях входных потоков требований всех типов в выходном потоке наблюдается преобладание требований одних типов над заявками других типов. Для реализации равномерного обслуживания заявок каждого типа нужно знать необходимое число обслуживающих устройств m и число мест в накопителе E . Для этого абсолютную пропускную способность данного типа СМО [1] представим в виде трех слагаемых, каждое из которых представляет собой количество обслуженных заявок определенного типа:

$$A = \Lambda P_{\text{но}} + \lambda P_{\text{нзн}} + \lambda_1 P_{\text{пзн}} = \lambda_1 (P_{\text{но}} + P_{\text{нзн}} + P_{\text{пзн}}) + \lambda_2 (P_{\text{но}} + P_{\text{нзн}}) + \lambda_2 P_{\text{но}} = A_1 + A_2 + A_3.$$

Условие оптимальности в этом случае запишется в виде $A_1 = A_2 = A_3$.

С учетом условия нормировки $\sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_{\text{но}} + P_{\text{нзн}} + P_{\text{пзн}} = 1$ имеем

$$\lambda_1 = \lambda_2 (P_{\text{но}} + P_{\text{нзн}}) = \lambda_3 P_{\text{но}}.$$

В общем случае оптимальным можно считать такой режим функционирования СМО, когда заявки каждого типа обслуживаются не в равных количествах, а в определенной пропорции. Тогда условие оптимальности примет вид:

$$a_1 \lambda_1 = a_2 \lambda_2 (P_{\text{но}} + P_{\text{нзн}}) = a_3 \lambda_3 P_{\text{но}},$$

где a_1, a_2, a_3 — коэффициенты пропорциональности, задаваемые с учетом требований к производительности СМО. Из последнего выражения получим систему уравнений

$$\frac{a_1}{a_3} \frac{\rho_1}{\rho_3} = P_{\text{но}}, \quad \frac{a_1}{a_2} \frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{a_1}{a_3} \frac{\rho_1}{\rho_3} = P_{\text{нзн}},$$

где вероятность неполной загрузки накопителя

$$P_{\text{нзн}} = \frac{R^m}{m!} P_0 \begin{cases} \frac{1 - (\rho/m)^E}{1 - \rho/m}, & \rho \neq m, \\ E, & \rho = m; \end{cases}$$

вероятность немедленного обслуживания $P_{\text{но}} = e_{m-1}(R)P_0$; вероятность простоя системы (нулевого состояния) P_0 :

$$P_0^{-1} = e_m(R) + \frac{R^m}{m!} \begin{cases} \frac{\rho}{m-\rho} \left[1 - \left(\frac{\rho}{m} \right)^E \right] + \frac{\rho_1}{m-\rho_1} \left(\frac{\rho}{m} \right)^E, & \rho \neq m, \\ E + \frac{\rho_1}{m-\rho_1}, & \rho = m; \end{cases}$$

неполная экспонента $e_m(R) = \sum_{i=0}^m (R^i / i!)$.

Решая данную систему уравнений относительно переменных m и E , получим значения числа обслуживающих устройств и емкости накопителя, удовлетворяющие заданному критерию оптимальности.

Данная методика позволяет еще на этапе проектирования оценить затраты, необходимые для оптимальной организации систем массового обслуживания с отказами и очередью и получения требуемой производительности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кирпичников А. П., Титовцев А. С.* Системы массового обслуживания с отказами и неограниченной очередью. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 5, с. 893–896.