

А. В. Шаповалов (Москва, ТВП). **О числе решений заведомо совместной системы случайных линейных уравнений над кольцом вычетов.**

Для каждого $i = 2, \dots, m$ обозначим $\Lambda_i = \{f_{i,1}, f_{i,2}, \dots, f_{i,m_i}\}$ некоторым образом упорядоченное множество всех линейных функций, зависящих от i переменных и имеющих вид $\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \dots + \gamma_i y_i$, где операция $+$ рассматривается в кольце вычетов по модулю z , $z \geq 3$ — натуральное число, γ_i принимают значения 1 или $z-1 = -1$ и $f_{2,1}(y_1, y_2) = y_1 - y_2$, $f_{2,2}(y_1, y_2) = y_1 + y_2$. Пусть заданы неотрицательные константы $c_2, \dots, c_m$, $c_{2,1}, c_{2,2}$, удовлетворяющие условиям: $c_2 + \dots + c_m = 1$, $c_2 = c_{2,1} + c_{2,2}$. Рассмотрим случайное уравнение

$$f_{i,j}(x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_i}) = a \quad (1)$$

относительно n неизвестных $x_1, \dots, x_n$, в которых индексы $s_1, \dots, s_i$, $i = 2, \dots, m$, выбираются по схеме без возвращения из множества $\{1, \dots, n\}$. Предполагается, что выбор упорядоченного множества индексов неизвестных $\{s_1, \dots, s_i\}$ для каждого уравнения с функцией из Λ_i осуществляется случайно и равновероятно по схеме с возвращением из всех n^i возможных упорядоченных наборов индексов по i штук. Правая часть случайного уравнения (1) не зависит от левой части и принимает значения $0, 1, \dots, z-1$ с равными вероятностями. При каждом фиксированном i , $i \geq 3$, способ выбора номера линейной функции j произволен.

Заведомо совместная система случайных уравнений S состоит из M случайных независимых друг от друга уравнений вида (1), первые $M_{2,1}$ из которых имеют в левой части функцию $f_{2,1}$, следующие $M_{2,2}$ — функцию $f_{2,2}$, следующие M_3 имеют вид (1) при $i = 3, \dots$, последние M_m уравнений имеют вид (1) при $i = m$. Числа уравнений зависят от n : $M = M(n)$; если $c_{2,j} = 0$, то $M_{2,j} = 0$, если $c_{2,j} > 0$, то $M_{2,j} \sim c_{2,j} M$, $j = 1, 2$; если $c_i = 0$, то $M_i = 0$, если $c_i > 0$, то $M_i \sim c_i M$, $i = 3, \dots, m$.

Все асимптотические формулы приводятся при $n \rightarrow \infty$. Обозначим η_n число решений случайной системы уравнений S , деленное на z^{n-M} , $\Delta = c_{2,2} - c_{2,1}$, $(s)_2 = s(s-1)$ и $\mu = -\log\{(1-2cc_2)/(1+2c\Delta)\}/4$, $\chi = -\log\{(1-2cc_2)(1+2c\Delta)\}/4$.

Теорема. Пусть $c_2 > 0$ и выполнено условие

$$M \sim cn, \quad 0 < c < (c_2(2)_2 + c_3(3)_2 + \dots + c_m(m)_2)^{-1}, \quad (2)$$

где c — константа. Тогда при нечетных z

$$\mathbf{P}\{\eta_n = z^k\} \sim e^{-\chi} \chi^k / k!, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \eta_n^r \geq \exp\{\chi(z^r - 1)\}, \quad r = 0, 1, \dots;$$

при четных $z \geq 6$, $z \neq 2^t$, $t = 2, 3, \dots$

$$\mathbf{P}\{\eta_n = z^k 2^s\} \sim e^{-\chi - \mu} \chi^k \mu^s / (k! s!), \quad k = 0, 1, \dots, \quad s = 0, 1, \dots;$$

при $z = 2^t$, $t = 2, 3, \dots$

$$\mathbf{P}\{\eta_n = 2^s\} \sim e^{-\chi - \mu} \sum_{i=0}^{s/t} [\chi^i \mu^{s-ti} / (s! (s-ti)!)], \quad s = 0, 1, \dots;$$

при всех четных $z \geq 4$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \eta_n^r \geq \exp\{\chi(z^r - 1) + \mu(2^r - 1)\}, \quad r = 0, 1, \dots$$

При фиксации вероятности появления функций из Λ_i , $i = 3, \dots, m$, в уравнении (1) в оценках для моментов знак неравенства заменяется знаком равенства.