

В. Д. Александров (Ростов-на-Дону, ФГУП «ГКБ «Связь»»).
Представление интеграла Зоммерфельда через гипергеометрические функции двух переменных.

В 1909 г. А. Зоммерфельд получил строгое решение задачи о распространении радиоволн, излучаемых вертикальным электрическим диполем, вдоль плоской земной поверхности с конечной проводимостью в виде интеграла для функции Герца

$$\Pi_1(r, z=0) = (k_1^2 + k_2^2) \int_0^\infty \frac{J_0(\xi r) \xi d\xi}{k_2^2 \sqrt{\xi^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{\xi^2 - k_2^2}}, \quad (1)$$

где r — расстояние между источником излучения и точкой наблюдения вдоль земной поверхности, k_1 и k_2 — волновые числа для воздуха и Земли, соответственно, $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя.

Трудности, связанные с вычислением интегралов от быстроосциллирующих функций, обусловленные явлением Гиббса, общеизвестны: дополнительные трудности связаны с комплексными значениями волновых чисел, различных для различных видов земной поверхности — песка, камня, пресной и морской воды и т. д.

Аналитическому вычислению интеграла Зоммерфельда посвящено огромное множество работ, однако до настоящего времени по прошествии 100 лет замкнутого выражения для этого интеграла получено не было.

Доклад посвящен представлению интеграла Зоммерфельда в виде линейной комбинации двух гипергеометрических функций двух переменных в виде

$$\Pi_1(r) = \frac{1}{(1 - \tau^2)r} \left[K(k_1) - \tau^2 K(k_2) \right],$$

$$K(k_1) = \frac{e^{ik_1 r}}{(1 - \tau^2)r} \sqrt{\tau/2} \left(\frac{l+1}{l-1} \right)^{1/4} \Xi_1 \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, (-isr\tau) \left(\frac{l-1}{l+1} \right)^{1/2} \right],$$

где

$$\Xi_1(a, a', b; c, w, u) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_m (a')_n (b)_m}{(c)_{m+n}} \frac{w^m u^n}{m! n!}, \quad |w| < 1,$$

$$\tau = \frac{k_1}{k_2}, \quad s = \frac{k_1 k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, \quad l = \frac{k_1}{s}.$$

Представление интеграла Зоммерфельда в виде комбинаций гипергеометрических функций двух переменных позволяет представить этот интеграл в виде однократных рядов либо по разложениям, гипергеометрическим функциям Гаусса, выражающимся через комбинации обратных тригонометрических функций, либо по вырожденным гипергеометрическим функциям, выражающимся через комбинации интегралов вероятности от комплекса аргумента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sommerfeld A.* Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie. — Ann. Phys., 1909, Bd. 28, S. 665.
2. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986, 800 с.