

Т. А. Белкина, А. А. Мурашкин (Москва, ЦЭМИ РАН, МИЭМ).
Оптимальное управление портфелем активов для инвестора с доходом, зависящим от размера капитала.

Исследуется задача оптимального управления капиталом в динамической модели инвестора, действующего на (B, S) -рынке с непрерывным временем и имеющего неотрицательный доход, определяемый некоторой функцией от размера капитала. Процесс изменения капитала X_t , $t \geq 0$, описывается следующим уравнением:

$$dX_t = c(X_t) dt + r(X_t - \theta_t S_t) dt + \theta_t dS_t, \quad X_0 = u,$$

где $u \geq 0$ — начальный капитал, S_t и θ_t — цена акции и число акций в портфеле соответственно в момент t , r — процентная ставка, $c(x)$ — положительная функция, определяющая доход в единицу времени (интенсивность) при текущем капитале x . Изменение цены акции описывается геометрическим броуновским движением

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dw_t),$$

где $\mu, \sigma > 0$ и w_t , $t \geq 0$, — стандартный винеровский процесс. Случайный процесс θ_t , $t \geq 0$, рассматриваемый как неупреждающее управление, является предсказуемым процессом относительно фильтрации, порожденной процессом w_t . При этом в качестве допустимых рассматриваются только такие управления, которые не предполагают заимствования, т.е. для любого $t \geq 0$ должно быть выполнено неравенство $\theta_t S_t \leq X_t$. Изучается задача максимизации функционала

$$\mathbf{E} \int_0^\infty g(X_t) e^{-\lambda t} dt,$$

где $g(x)$ — положительная ограниченная неубывающая функция полезности инвестора, λ — субъективная ставка дисконтирования. Данная задача, с одной стороны, представляет самостоятельный интерес, с другой стороны, может рассматриваться как вспомогательная задача при исследовании проблемы оптимального управления инвестициями для страховщика с целью минимизации вероятности разорения (о взаимосвязи этих двух проблем в предположении возможности заимствований см. [1]).

Был получен вид оптимальной стратегии инвестиций, зависящий от решения некоторой сингулярной краевой задачи для дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция Беллмана как функция начального капитала. Было также исследовано асимптотическое представление решения этой задачи при малых значениях начального капитала с помощью метода асимптотической диагонализации для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [1], [2]), необходимое как для определения вида оптимальной стратегии, так и для проводимых численных расчетов.

Работа поддержана РФФИ, проект № 07-01-00541.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hipp C., Plum M. Optimal investment for investors with state dependent income, and for insurers. — Finance Stoch., 2003, v. 7, № 3, p. 299–321.
2. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
3. Конюхова Н. Б. Сингулярные задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, т. 23, № 3, с. 629–645.