Е. М. Богатов, **И. А. Бучко** (Старый Оскол, СТИ МИСиС). **Вычисление зеркальных угловых коэффициентов в треугольной полости.**

Для решения задач теплообмена излучением между поверхностями необходимо знать, какая часть лучистой энергии, покидающей элемент одной поверхности, попадает на элемент другой поверхности. Для диффузно испускающих и диффузно отражающих поверхностей эта информация целиком содержится в элементарном угловом коэффициенте $d\varphi_{dA_1-dA_2}$ [1]. Когда речь идет о зеркально отражающих поверхностях, необходимо учесть долю энергии, попадающей с одной поверхности на другую с учетом многократных отражений от поверхности системы. Здесь также можно ввести понятие углового коэффициента $d\Phi_{dA_1-dA_2}$, который имеет дополнительное название «зеркальный» (см. [2]). Целесообразность использования зеркальных угловых коэффициентов на практике была показана в работе [3].

Следуя [1], определим $d\Phi_{dA_1-dA_2}$ в виде ряда следующим образом:

$$d\Phi_{dA_1-dA_2} = f_0 + \rho^1 f_1 + \rho^2 f_2 + \cdots, \tag{1}$$

где ρ — зеркальная отражательная способность полости ($\rho < 1$). Первый член ряда, f_0, характеризует прямой перенос лучистой энергии от элемента dA_1 к элементу dA_2; он равен $d\varphi_{dA_1-dA_2}$. Последующие члены ряда вида $\rho^n f_n$ представляют собой часть лучистой энергии, которая покидает элемент dA_1 и попадает на элемент dA_2, испытав n промежуточных зеркальных отражений. Так как площадка dA_1 испускает ограниченное количество энергии, то ряд (1) должен сходиться.

Для нахождения $d\Phi_{dA_1-dA_2}$ будем использовать основное свойство плоских зеркал: отраженный луч сохраняет все свойства отражаемого луча. На этом свойстве основан метод изображений [1]. Он заключается в том, чтобы построить изображения (образы) источника лучей во всех зеркалах системы с учетом всевозможных отражений луча, найти угловой коэффициент и количество отражений луча для каждого образа, а затем найти зеркальный угловой коэффициент как сумму полученных результатов. Этот метод эффективен, если удается установить закономерность в расположении образов в пространстве.

Для треугольной полости Δ, ограниченной одинаковыми (протяженными) зеркальными поверхностями, эту закономерность легко установить. Введ°м декартову систему координат с центром O в середине стороны Δ, которой принадлежит источник излучения, с единицей измерения, равной длине стороны Δ. Тогда мы сможем найти координаты каждого образа источника.

Эксплуатируя эту идею, получим

$$\begin{aligned} d\Phi_{dA_1-dA_2} = \Bigg(&\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\rho^{N_{ij}}}{2r_{ij}^2}\left(\Delta x_{ij}\left|\frac{1}{2}\Delta x_{ij} + \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta y_{ij}\right|\right) \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\rho^{N_{ij}}}{2r_{ij}^2}\left(\Delta x_{ij}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\Delta x_{ij} - \frac{1}{2}\Delta y_{ij}\right|\right) \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\rho^{N_{ij}}}{2r_{ij}^2}\Delta x_{ij}^2\Bigg)\, dA_1\, dA_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Ряд (2) сходится при $\rho < 1$. Его элементы ограничены элементами мажорирующего степенного ряда

$$d\Phi_{dA_1-dA_2} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\rho^{3i+3j+3}}{6j+4} + \frac{\rho^{3i+3j+3}}{\sqrt{3}(6j+4)} + \frac{\rho^{3i+3j+3}(i+1)}{3j+\frac{5}{2}}\right) dA_1\, dA_2. \tag{3}$$

Тогда приближенно сумму ряда (2) можно определить как сумму определенного числа первых членов ряда и остатка ряда, оцененного при помощи ряда (3). Сумма ряда (3) вычисляется при помощи пакета Mathematica [4].

В итоге для вычисления зеркального углового коэффициента получается приближенная формула:

$$
\begin{aligned}
d\Phi_{dA_1-dA_2} \approx{} & dA_1 dA_2 \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=-k}^{k} \rho^{N_{ij}} (i\sqrt{3} - 3 - \xi) \\
& \times \frac{|i\sqrt{3} + 6j\sqrt{3} - 2\eta\sqrt{3} + 3\xi + 3\sqrt{3}(i \bmod 2) - 3|}{2((\xi - i\sqrt{3} + 1)^2 + (6j - 2\eta + \xi\sqrt{3} + 3(i \bmod 2))^2)^{3/2}} \\
& + \sqrt{3} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=-k}^{k} \frac{\rho^{N_{ij}} (i - \xi + 1)|2\eta - 4\xi + 6(i \bmod 2) + 3|}{2((i - \xi + 1)^2 + (6j - 2\eta + \xi + 3(i \bmod 2))^2)^{3/2}} \\
& + 3 \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=-k}^{k} \frac{\rho^{N_{ij}} (i+1)^2}{8(\frac{3}{4}(i+1)^2 + (3j - \eta + \xi + \frac{3}{2}(i \bmod 2))^2)^{3/2}} \\
& + \frac{1}{360(\rho^3 - 1)^2} \Bigg[\rho^{3k+3} \Bigg(3 \Bigg(-5(3+\sqrt{3})(\rho^3 - 1)\, {}_2F_1\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}, \rho^3\right) \\
& + 24(1 + k - k\rho^3)\, {}_2F_1\left(\frac{5}{6}, 1, \frac{11}{6}, \rho^3\right) \\
& + 10\Bigg((3+\sqrt{3})(\rho^3 - 1)(\rho^{3k+3} - 1) \frac{\Gamma(2/3 + k)}{\Gamma(5/3 + k)}\, {}_2F_1\left(1, \frac{2}{3} + k, \frac{5}{3} + k, \rho^3\right) \\
& + 6\Big(1 + \rho^{3k+3}(\rho^3 - 1) + \rho^{3k+3}(k\rho^3 - k - 1)\Big)\Bigg) \\
& \times \frac{\Gamma(5/6 + k)}{\Gamma(11/6 + k)}\, {}_2F_1\left(1, \frac{5}{6} + k, \frac{11}{6} + k, \rho^3\right) \Bigg) \Bigg) \Bigg],
\end{aligned}
$$

где Γ — гамма-функция, ${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k / (c_k\, k!)$, ξ — расстояние от точки испускания (площадка dA_1) до вершины, противолежащей поглощающей площадке dA_2, η — расстояние от поглощающей точки до точки О.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 06–08–96312.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Спэрроу Э. М., Сесс Р. Д.* Теплообмен излучением. Л.: Энергия, 1971.
2. *Оцисик М. Н.* Сложный теплообмен. М.: Мир, 1976.
3. *Engstrom P. M., , Viscanta R., Toog J. S.* Study of radiation interchange in an enclosure consisting of plane isothermal and adiabatic surfaces. — Warme- und Stofübertragung, 1970, № 3, p. 63–69.
4. *Дьяконов В. П.* Mathematica 5.1/5.2/6.0. Программирование и математические вычисления. М.: ДМК Пресс, 2008.