А. Ю. Б о г д а н о в, **Е. А. К у д а ш о в а** (Ульяновск, УлГУ). **К вопросу об оптимальной стабилизации дискретных управляемых систем.**

Рассматривается управляемая дискретная система

$$x(n+1) = f(n, x(n), U(n, x(n))), \quad f(n,0,0) \equiv 0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbf{R}^m$, $U \in \mathbf{R}^k$ — векторы состояния и управления. Правая часть $f(n,x,U)$ определена для некоторого класса управлений $\mathcal{U} = \{U(n,x)\colon\ U(n,0) \equiv 0\}$, причем $U(n,x) \in C(G)$, где $G = \mathbf{Z}^+ \times \Gamma$, $\Gamma = \{\|x\| \leqslant H,\ H = \mathrm{const} > 0\}$.

Пусть оценкой качества управления этой системой служит значение функционала

$$J = \sum_{n=n_0}^{+\infty} W(n, x(n), U(n)). \tag{2}$$

Функция $W(n,x,U)$ представляет собой некоторую непрерывную неотрицательную функцию, определенную в области G. Вопрос о выборе этой функции определяется в каждом случае конкретными особенностями рассматриваемой прикладной задачи.

Задача об оптимальной стабилизации движения управляемой дискретной системы на бесконечном интервале времени сводится к отысканию оптимальной функции Ляпунова $V^0(n,x)$ и оптимального управления $U^0(n,x) \in \mathcal{U}$, удовлетворяющих уравнению Беллмана

$$V^0(n,x) = \min_U (V^0(n+1, f(n,x,U)) + W(n,x,U)),$$

при условии $V^0(n+1, f(n,x,U)) - V^0(n,x) + W(n,x,U) \geqslant 0$ для всех $U(n,x) \in \mathcal{U}$.

О п р е д е л е н и е. Управляющее воздействие $U = U^0(n,x)$ называется *стабилизирующим* с гарантированной оценкой качества управления $P(n,x)$, если оно обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения $x \equiv 0$ системы (1), при этом на каждом управляемом движении $x^0(n)$, $x^0(n_0) = x_0$, справедливо неравенство

$$J = \sum_{n=n_0}^{+\infty} W(n, x^0(n), U^0(n, x^0(n))) \leqslant P(n_0, x_0). \tag{3}$$

Согласно определению, можно поставить задачу о стабилизации с гарантированной оценкой качества управления: найти среди всех $U(n,x) \in \mathcal{U}$ управление $U^0(n,x)$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость движения $x \equiv 0$ системы (1), при котором на каждом управляемом движении $x^0(n)$, $x^0(n_0) = x_0$, справедливо неравенство (3). В решении поставленной задачи основными объектами остаются функция Ляпунова–Беллмана $V = V(n,x)$ и выражение $B[V,n,x,U] = V(n+1, f(n,x,U)) - V(n,x) + W(n,x,U)$.

Рассмотрим теперь задачу об определении вида функции W в функционале качества (2). Пусть известна функция Ляпунова $V(n,x) \in C(G)$, $V(n,0) \equiv 0$, обеспечивающая устойчивость тривиального решения $x \equiv 0$ системы (1) с первой разностью $\dot V(n,x) \leqslant 0$ в силу (1). Допустим, что к системе (1) приложены дополнительные управляющие воздействия вида $f_1(n,x,U) = M(n,x)U$, где $U \in \mathbf{R}^k$, $M(n,x)$ — функциональная матрица размерности $m \times k$, и для полученной управляемой системы

$$x(n+1) = f(n, x(n)) + M(n, x(n))U \tag{4}$$

оценкой качества управления является функционал (2). Поставим задачу: найти вид функции $W(n,x,U)$, при котором указанная для системы (1) функция Ляпунова $V(n,x)$, обеспечивающая устойчивость тривиального решения этой системы, может служить стабилизирующей функцией Ляпунова с гарантированной оценкой качества управления $P(n,x) = V(n,x)$ для управляемой системы (4). Зададим функцию

$W(n,x,U)$ в виде

$$W(n,x,U) = G(n,x) + U^T R(n,x)U, \qquad (5)$$

где $R(n,x) > 0$ — функциональная матрица $k \times k$, а $G(n,x) \geqslant 0$ — вектор-функция, подлежащая определению. Если $V(n,x) = x^T P(n)x$, $P(n) > 0$, то из уравнения $\partial B/\partial U = 0$ имеем

$$U^0(n,x) = -(M^T(n,x)P(n+1)M(n,x) + R(n,x))^{-1}M^T(n,x)P(n+1)f(n,x). \qquad (6)$$

Из условия $B[V,n,x,U^0(n,x)] \leqslant 0$ найдем соотношение для определения функции $G(n,x)$:

$$\begin{aligned} G(n,x) \leqslant\ & -\dot V_{(1)}(n,x) + f^T(n,x)P(n+1)M(n,x) \\ & \times (M^T(n,x)P(n+1)M(n,x) + R(n,x))^{-1}M^T(n,x)P(n+1)f(n,x). \qquad (7) \end{aligned}$$

Это соотношение дает возможность более широкого выбора функционала (2) с $W(n,x,U)$ в форме (5) по сравнению с задачей оптимальной стабилизации, когда

$$\begin{aligned} G(n,x) =\ & -\dot V_{(1)}(n,x) + f^T(n,x)P(n+1)M(n,x) \\ & \times (M^T(n,x)P(n+1)M(n,x) + R(n,x))^{-1}M^T(n,x)P(n+1)f(n,x). \qquad (8) \end{aligned}$$

Используя теорему 3.2 из [3], можно получить следующий результат.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *известна допускающая бесконечно малый высший предел положительно определенная функция* $V(n,x)$, $\dot V(n,x) \leqslant 0$, *и*

1) *правая часть системы* (4) $f_0(n,x) = f(n,x) + M(n,x)U^0(n,x)$ *и функция* $W_0(n,x) = W(n,x,U^0(n,x))$ *удовлетворяют условиям предкомпактности* [3];

2) *для любой предельной к* (f_0, W_0) *пары* (f_0^*, W_0^*) *множество* $\{W_0^*(n,x) = 0\}$ *не содержит решений предельной системы* $x(n+1) = f_0^*(n, x(n))$, *кроме* $x \equiv 0$.

Тогда управление (6) *является стабилизирующим для системы* (4) *с гарантированной оценкой качества* $P(n,x) = V(n,x)$ *функционала* (2) *с* (5) *и* (7).

При усилении условия на функционал качества (2), т. е. при требовании его минимизации, как следствие теоремы 1 имеем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть для системы* (1) *известна допускающая бесконечно малый высший предел положительно определенная функция* $V(n,x)$, $\dot V(n,x) \leqslant 0$, *и*

1) *правая часть системы* (4) $f_0(n,x) = f(n,x) + M(n,x)U^0(n,x)$ *и функция* $W_0(n,x) = W(n,x,U^0(n,x))$ *удовлетворяют условиям предкомпактности* [3];

2) *для любой предельной к* (f_0, W_0) *пары* (f_0^*, W_0^*) *множество* $\{W_0^*(n,x) = 0\}$ *не содержит решений предельной системы* $x(n+1) = f_0^*(n, x(n))$, *кроме* $x \equiv 0$;

3) $B[V,n,x,U^0(n,x)] \equiv 0$ *и* $B[V,n,x,U(n,x)] \geqslant 0$ *для любого другого* $U(n,x) \in \mathcal{U}$.

Тогда управление (6) *решает задачу об оптимальной стабилизации системы* (4) *с минимумом функционала* (2) *с* (5) *и* (8).

Теоремы 1 и 2 развивают подход, представленный в работах [1], [2] для непрерывных систем, на класс дискретных управляемых систем, при этом ослабляются требования к первой разности функции Ляпунова (она может быть знакопостоянной), и тождественное равенство функции Беллмана нулю заменяется неравенством — условием (7), которое позволяет существенно расширить выбор выражения $W(n,x,U)$ для функционала (2).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 08–01–97010р (Поволжье).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев А.С.*, *Безгласный С.П.* О стабилизации управляемых систем с гарантированной оценкой качества управления. — Прикладная математика и механика, 1997, т. 61, в. 1, с. 44–51.
2. *Румянцев В. В.*, *Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.
3. *Богданов А. Ю.* Дискретные динамические системы: проблемы устойчивости и управления. Ульяновск: Венец, 2008.