В. Н. Думачев, А. А. Толкачев (Воронеж, ВИ МВД России)**. О представлении Лакса многоуровневых систем квантовой информации.**

Обобщением понятия кубита на многоуровневый случай является кутрит (qutrits $n = 3$) и кунит (qunits $n = N$). Для более полного описания этих состояний используется теория групп. На роль носителей квантовой информации в настоящее время претендуют наблюдаемые генераторы группы $SO(3)$ (изоморфной $SU(2)$). Для получения неприводимых представлений группы $SU(2)$ используется стандартный метод построения собственных состояний оператора углового момента. Другим методом является использование циклических n-уровневых систем с условием периодичности $|n, i+n\rangle = |n, i\rangle$. Это позволяет использовать для описания два оператора $\Sigma_1|n,i\rangle = |n, i+1\rangle \pmod n$, $\Sigma_3|n,i\rangle = i|n,i\rangle$, где $(\Sigma_1)_{ij} = \delta_{i,i+n}$, $(\Sigma_3)_{ij} = \delta_{i,j}\sigma^{j-1}$, $\Sigma_1^+ = \Sigma_1^{n-1}$, а $\sigma = e^{2i\pi/n}$ имеет следующие свойства:

$$\sigma^n = 1, \quad \sigma^{n+k} = \sigma^k (\operatorname{mod} n), \quad \sigma = \sigma^{n+1}, \quad \sum_{k=0}^{n} \sigma^k = 0.$$

Разложение в ряд оператора $e^{x\Sigma_1}$ дает

$$e^{t\Sigma_1} = c_0(t)\Sigma_0 + c_1(t)\Sigma_1 + \dots + c_{n-2}(t)\Sigma_1^{n-2} + c_{n-1}(t)\Sigma_1^{n-1},$$

где функции

$$c_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{nk+j}}{(nk+j)!}$$

удовлетворяют системе дифференциальных уравнений $\dot{c} = \Sigma_1^+ c$ с парой Лакса $\dot{L} = [ML]$:

$$L = \begin{pmatrix} c_{n-1}\sigma^{n-1} & c_0\sigma^{n-2} & c_1\sigma^{n-3} & \dots & c_{n-3}\sigma^1 & c_{n-2}\sigma^0 \\ c_{n-2}\sigma^{n-2} & c_{n-1}\sigma^{n-3} & c_0\sigma^{n-4} & \dots & c_{n-4}\sigma^0 & c_{n-3}\sigma^{n-1} \\ c_{n-3}\sigma^{n-3} & c_{n-2}\sigma^{n-4} & c_{n-1}\sigma^{n-5} & \dots & c_{n-5}\sigma^{n-1} & c_{n-4}\sigma^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_2\sigma^2 & c_3\sigma^1 & c_4\sigma^0 & \dots & c_0\sigma^4 & c_1\sigma^3 \\ c_1\sigma^1 & c_2\sigma^0 & c_3\sigma^{n-1} & \dots & c_{n-1}\sigma^3 & c_0\sigma^2 \\ c_0\sigma^0 & c_1\sigma^{n-1} & c_2\sigma^{n-2} & \dots & c_{n-2}\sigma^2 & c_{n-1}\sigma^1 \end{pmatrix},$$

$$M = \frac{\sigma^{n-1} - \sigma^1}{n}\,\Sigma_1.$$

Во всех исследуемых случаях найденные инварианты $I_k = k^{-1}\operatorname{tr} L^k$ находятся в инволюции и скобка Пуассона $\{I_i, I_k\} = 0$ не дает для них новых интегралов.