

Г. И. Б е л я в с к и й, М. Е. Ж е л о н к и н (Ростов-на-Дону, ЮФУ).
Использование техники методов Монте–Карло при вычислении параметров ARCH-модели.

В работе, представленной данным сообщением, изложены различные методы вычисления параметров ARCH-модели первого и второго порядков. Рассмотрены различные подходы к данной проблеме, как классические методы (метод максимального правдоподобия, метод наименьших квадратов), так и методы, основанные на технике Монте–Карло. Экспериментально исследована точность алгоритмов вычисления параметров. Приведены примеры вычислений с различными генераторами шумов при создании модельных данных.

Модель авторегрессионной условной неоднородности (ARCH) определяется следующим образом: $X_t = \sigma_t \varepsilon_t$, где

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 X_{t-1}^2 + a_2 X_{t-2}^2 + \dots + a_p X_{t-p}^2 \quad (1)$$

и $a_0 \geq 0$ — константы, $\{\varepsilon_i\} \sim N(0, 1)$ — набор независимых нормально распределенных случайных величин («белый шум»).

Также учитывается устойчивость модели, что приводит к дополнительным ограничениям задачи:

$$a_i > 0, \quad \sum_{i=1}^p a_i < 1. \quad (2)$$

Основной трудностью при моделировании процесса с помощью ARCH является точный подбор параметров. Ранее было предложено большое количество методов вычисления параметров: метод максимального правдоподобия, метод оценки Уиттла и т. д. Но эти методы оказались неточными при вычислении параметров по сгенерированным модельным данным и очень требовательными к количеству наблюдений временного ряда, что доставляет неудобства на практике. Помимо этого, недостатком этих методов является то, что в них не учитывается случайная составляющая ряда.

В качестве примера рассмотрим метод наименьших квадратов. Из (1) получаем

$$S = \sum_{i=p+1}^N (a_0 + a_1 X_{i-1}^2 + \dots + a_p X_{i-p}^2 - X_i^2 / \varepsilon_i^2).$$

Дальнейшие вычисления при таком виде модели затруднительны, поэтому удобнее перейти к минимизации суммы квадратов разностей волатильностей. Система уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} a_0(N-p) + a_1 \sum_{i=p}^n X_{i-1}^2 + \dots + a_p \sum_{i=p+1}^n X_{i-p}^2 &= \sum_{i=p+1}^N X_i^2, \\ a_0 \sum_{i=p}^n X_{i-1}^2 + a_1 \sum_{i=p}^n X_{i-1}^4 + \dots + a_p \sum_{i=p}^n X_{i-p}^2 X_{i-1}^2 &= \sum_{i=p+1}^n X_i^2 X_{i-1}^2, \\ \dots \dots \dots &\dots \dots \dots \\ a_0 \sum_{i=p}^n X_{i-p}^2 + a_1 \sum_{i=p}^n X_{i-1}^2 X_{i-p}^2 + \dots + a_p \sum_{i=p+1}^n X_{i-p}^4 &= \sum_{i=p+1}^n X_i^2 X_{i-p}^2. \end{aligned}$$

При подобном подходе точность оценки параметров при малых N очень низка. Для сокращения длины временного ряда, необходимого для вычисления его параметров, можно воспользоваться техникой метода Монте–Карло. Для этого на каждой итерации генерируется новая последовательность шумов с исходными параметрами распределения $\varepsilon^n = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)^T$,

$$S(\varepsilon^N) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=p+1}^T ((\alpha_0 + \alpha_1 X_{i-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{i-p}^2) \varepsilon_{ij}^2 - X_i^2)^2.$$

Далее для решения этой задачи можно пользоваться такими методами, как замена математического ожидания выборочным средним, метод усреднения параметров и т. д.

В докладе предлагается анализ этих методов и их сравнение с ранее предложенными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jianqing Fan, Qiwei Yao.* Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods. Springer–Verlag New York Inc., 2003.
2. *Соболев И. М.* Метод Монте–Карло. М.: Наука, 1968.
3. *Franses P. H., van Dijk D.* Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance. Cambridge University Press, 2000.
4. *Gentle J. E.* Random Number Generation and Monte Carlo Methods. Springer, 2003.