В. А. И в н и ц к и й (Москва, МИИТ). **Определение корреляционных функций количества требований в узлах замкнутой сети массового обслуживания.**

Пусть в замкнутой СеМО (ЗСеМО) имеется m узлов и циркулирует N требований. Число каналов обслуживания в каждом узле равно N. После завершения обслуживания в i-м узле требование с вероятностью P_{ij} поступает на обслуживание в j-й узел, $\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1$, $i = 1, \ldots, m$, и сразу начинает обслуживаться. Матрица (P_{ij}) неразложима. Длительность обслуживания в i-м узле имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_i. Обозначим $\nu_i(t)$ число требований в i-м узле в момент t. Процесс $\zeta(t) = \{\nu_1(t), \ldots, \nu_m(t)\}$ является марковским. Пусть $P(k_1, \ldots, k_m, t) = \mathbf{P}\{\nu_1(t) = k_1, \ldots, \nu_m(t) = k_m\}$, $\sum_{i=1}^{m} k_i = N$. Обозначим $n_i(t)$ математическое ожидание количества требований $\nu_i(t)$ в i-м узле, $i = 1, \ldots, m$. Представляет непосредственный теоретический и практический интерес нахождение корреляционных и взаимно корреляционных функций количества требований в узлах рассматриваемой ЗСеМО, т. е. $\mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(t') - n_i(t)n_k(t)$. Так как уравнения для $n_i(t)$ получены в [1], то необходимо найти уравнения для моментов $\mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(t')$.

Теорема 1. *Для моментов $\mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(t')$ справедлива система дифференциальных уравнений второго порядка*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}\mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(t') &= (\mu_m\mu_m P_{mk}P_{mi} + \mu_i\mu_m P_{mk} + \mu_k\nu_m P_{mi} + \mu_i\mu_k)\mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(t') \\
&- \sum_{\substack{d=1\\ d\neq k}}^{m-1} (\mu_i\mu_d P_{dk} - \mu_i\mu_m P_{mk} + \mu_m\mu_d P_{dk}P_{mi} - \mu_m\mu_m P_{mk}P_{mi})\mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_d(t') \\
&- \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m-1} (\mu_k\mu_j P_{ji} - \mu_k\mu_m P_{mi} + \mu_j\mu_m P_{mk}P_{ju} - \mu_m\mu_m P_{mk}P_{mi})\mathbf{M}\,\nu_j(t)\nu_k(t') \\
&+ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m-1}\sum_{\substack{d=1\\ d\neq k}}^{m-1} (\mu_j\mu_d P_{dk}P_{ji} - \mu_m\mu_d P_{dk}P_{mi} - \mu_j\mu_m P_{mk}P_{ji} + \mu_m\mu_m P_{mk}P_{mi})\mathbf{M}\,\nu_j(t)\nu_k(t') \\
&- N\mu_i\mu_m P_{mk}n_i(t) - N\mu_k\mu_m P_{mi}n_k(t') + N\sum_{\substack{d=1\\ d\neq k}}^{m-1} \mu_m\mu_d P_{dk}P_{mi}n_d(t') \\
&+ N\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m-1} \mu_j\mu_m P_{mk}P_{ji}n_j(t) + N^2\mu_m^2 P_{mk}P_{mi} - N\mu_m^2 P_{mk}P_{mi}\left(\sum_{i=1}^{m-1} n_i(t) + \sum_{i=1}^{m-1} n_i(t')\right), \\
&\qquad 1 \leqslant i,k \leqslant m-1, \quad n_m(t) = N - \sum_{i=1}^{m-1} n_i(t), \qquad (1)
\end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M}\,\nu_i(0)\nu_k(t'), \quad \frac{d}{dt'}\mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(0), \quad \mathbf{M}\,\nu_i(0)\nu_k(0).$$

Введем обозначения: $\widetilde{n}_{ik}(s,u) = \int_0^\infty\int_0^\infty \mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(t')e^{-st-ut'}\,dt\,dt'$, $1 \leqslant i,k \leqslant m-1$, $\widetilde{n}_i(s) = \int_0^\infty \mathbf{M}\,\nu_i(t)e^{-st}\,dt$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $\widetilde{n}_{1ik}(s,0) = \int_0^\infty e^{-st}\mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(0)\,dt$, $\widetilde{n}_{2ik}(0,u) = \int_0^\infty e^{-ut'}\mathbf{M}\,\nu_i(0)\nu_k(t')\,dt'$.

Теорема 2. *В преобразованиях Лапласа система линейных дифференциальных уравнений второго порядка* (1) *приобретает вид следующей системы линейных* *алгебраических уравнений*:

$$
\begin{aligned}
&(su-\mu_m\mu_m P_{mk}P_{mi}-\mu_i\mu_m P_{mk}-\mu_k\mu_m P_{mi}-\mu_i\mu_k)\widetilde{n}_{ik}(s,u)\\
&\quad=-\sum_{\substack{d=1\\d\neq k}}^{m-1}(\mu_i\mu_d P_{dk}-\mu_i\mu_m P_{mk}+\mu_m\mu_d P_{dk}P_{mi}-\mu_m\mu_m P_{mk}P_{mi})\widetilde{n}_{id}(s,u)\\
&\qquad-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m-1}(\mu_k\mu_j P_{ji}-\mu_k\mu_m P_{mi}+\mu_j\mu_m P_{mk}P_{ji}-\mu_m\mu_m P_{mk}P_{mi})\widetilde{n}_{jk}(s,u)\\
&\qquad+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}\sum_{\substack{d=1\\d\neq k}}^{m-1}(\mu_j\mu_d P_{dk}P_{ji}-\mu_m\mu_d P_{dk}P_{mi}-\mu_j\mu_m P_{dk}P_{mk}P_{ji}+\mu_m\mu_m P_{mk}P_{mi})\widetilde{n}_{jd}(s,u)\\
&\qquad-Nu^{-1}\mu_i\mu_m P_{mk}\widetilde{n}_i(s)-Ns^{-1}\mu_k\mu_m P_{mi}\widetilde{n}_k(u)+Ns^{-1}\sum_{\substack{d=1\\d\neq k}}^{m-1}\mu_m\mu_d P_{dk}P_{mi}\widetilde{n}_d(u)\\
&\qquad+Ns^{-1}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m-1}\mu_j\mu_m P_{dk}P_{mk}P_{ji}\widetilde{n}_j(u)+N^2s^{-1}u^{-1}\mu_m^2P_{mk}P_{mi}-N\mu_m^2P_{mk}P_{mi}\\
&\qquad\times\left(\sum_{i=1}^{m-1}\widetilde{n}_i(s)u^{-1}+\sum_{i=1}^{m-1}\widetilde{n}_i(u)s^{-1}\right)+s\widetilde{n}_{1ik}(s,0)+u\widetilde{n}_{2ik}(0,u)-\mathbf{M}\,\nu_i(0)\nu_k(0),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$1\leqslant i,k\leqslant m-1$, *где* $\widetilde{n}_{1ik}(s,0)$ *определяется системой линейных алгебраических уравнений*

$$
\begin{aligned}
(s+\mu_i+\mu_m P_{mi})\widetilde{n}_{1ij}(s,0)=&\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m-1}\widetilde{n}_{1jk}(s,0)(\mu_j P_{ji}-\mu_m P_{mk})\\
&+Ns^{-1}\mu_m P_{mi}+\mathbf{M}\,\nu_i(0)\nu_k(0),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

и $u\widetilde{n}_{2ik}(0,u)$ *определяется аналогичной системой уравнений*, $i,k=1,\ldots,m-1$.

Моменты второго порядка, в которые входит $\nu_m(t)$, имеют вид

$$\mathbf{M}\,\nu_k(t)\nu_m(t')=Nn_k(t)-\mathbf{M}\sum_{i=1}^{m-1}\nu_i(t')\nu_k(t),$$

$$\mathbf{M}\,\nu_m(t)\nu_k(t')=Nn_k(t')-\mathbf{M}\sum_{i=1}^{m-1}\nu_i(t)\nu_k(t'),$$

$$\mathbf{M}\,\nu_m(t)\nu_m(t')=N^2-N\sum_{i=1}^{m-1}n_i(t)-N\sum_{i=1}^{m-1}n_i(t')+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}\mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_j(t').$$

Размерность системы (2) равна $(m-1)^2$ и не зависит от N. Решая (2) и (3), обращая преобразование Лапласа и вычитая из решений $n_i(t)n_k(t)$, получаем искомые корреляционные и взаимно корреляционные функции количества требований в узлах ЗСеМО.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивницкий В. А.*, *Ивницкий О. В.* Нахождение нестационарных математических ожиданий количества «нетерпеливых» требований в узлах замкнутых марковских сетей массового обслуживания. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 2.