А. В. К а л и н к и н (Москва, МГТУ). **Решение уравнений одного марковского ветвящегося процесса с двумя типами частиц.**

Рассматривается однородный во времени марковский процесс на множестве состояний $N^2 = \{(\alpha_1,\alpha_2),\ \alpha_1,\alpha_2 = 0,1,\ldots\}$, переходные вероятности $P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)$, $t\in[0,\infty)$, которого представимы при $t\to 0+$ в виде ($\lambda>0$, $\mu>0$)

$$P_{(\alpha_1-1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = p_0\alpha_1\lambda t + o\,(t),\quad P_{(\alpha_1-1,\alpha_2+1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = p_1\alpha_1\lambda t + o\,(t),$$

$$P_{(\alpha_1,\alpha_2+1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = p_2\alpha_1\lambda t + o\,(t),\quad P_{(\alpha_1+1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = p_4\alpha_1\lambda t + o\,(t),$$

$$P_{(\alpha_1,\alpha_2-1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \alpha_2\mu t + o\,(t),$$

где $p_0\geqslant 0$, $p_1\geqslant 0$, $p_2\geqslant 0$, $p_4\geqslant 0$, $p_0+p_1+p_2+p_4=1$. Производящая функция $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t;s_1,s_2) = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)s_1^{\beta_1}s_2^{\beta_2}$ ($|s_1|\leqslant 1$, $|s_2|\leqslant 1$) обладает *свойством ветвления* $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t;s_1,s_2) = F_1^{\alpha_1}(t;s_1,s_2)F_2^{\alpha_2}(t;s_1,s_2)$ [1], где $F_1(t;s_1,s_2) = F_{(1,0)}(t;s_1,s_2)$, $F_2(t;s_1,s_2) = F_{(0,1)}(t;s_1,s_2)$. Имеет место система уравнений [1]

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \lambda(p_4F_1^2 + p_2F_1F_2 + p_1F_2 + p_0 - F_1),\qquad \frac{\partial F_2}{\partial t} = \mu(1-F_2), \tag{1}$$

с начальными условиями $F_1(0;s_1,s_2)=s_1$, $F_2(0;s_1,s_2)=s_2$.

Введем обозначения $a=\lambda p_0/\mu$, $b=\lambda p_1/\mu$, $c=\lambda p_2/\mu$, $d=\lambda p_4/\mu$ и положим

$$\begin{aligned}
W_1(t;s_2) &= (a+b)e^{-(a+b)\mu t}{}_2F_2(a+b+bd/c, a+b+1; a+b-d+1, a+b; c(1-s_2)e^{-\mu t}),\\
W_2(t;s_2) &= de^{-d\mu t}{}_2F_2(d+bd/c, d+1; -a-b+d+1, d; c(1-s_2)e^{-\mu t}),\\
H_1(t;s_2) &= de^{-(a+b)\mu t}{}_1F_1(a+b+bd/c; a+b-d+1; c(1-s_2)e^{-\mu t}),\\
H_2(t;s_2) &= de^{-d\mu t}{}_1F_1(d+bd/c; -a-b+d+1; c(1-s_2)e^{-\mu t}),
\end{aligned}$$

где ${}_2F_2(\alpha_1,\alpha_2;\beta_1,\beta_2;x)$, ${}_1F_1(\alpha;\beta;x)$ — обобщенные гипергеометрические функции.

Теорема. *Пусть $a+b-d$ не равно целому числу. Решение системы уравнений (1) имеет вид ($p_0+p_1>0$, $p_2>0$, $p_4>0$)*

$$F_1(t;s_1,s_2) = \frac{CW_1(t;s_2)+W_2(t;s_2)}{CH_1(t;s_2)+H_2(t;s_2)},\qquad F_2(t;s_1,s_2) = 1-(1-s_2)e^{-\mu t},$$

где $C = (W_2(0;s_2)-s_1H_2(0;s_2))/(W_1(0;s_2)-s_1H_1(0;s_2))$.

Случай $p_1=0$ рассмотрен в [2], где $F_1(t;s_1,s_2)$ выражена через бесселевы функции. Анализ нелинейных систем уравнений вида (1) применительно к частным случаям ветвящихся процессов с двумя типами частиц проведен в работе [3] (см. также [4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
2. *Gani J.*, *Tin P.* A note on the two-sex population process. — J. Appl. Prob., 1986, v. 23A, p. 335–344.
3. *Анастасиев А. С.* Решение уравнений ветвящихся процессов и специальные функции. Дипломная работа. М.: МГТУ, 2005, 82 с.
4. *Калинкин А. В.* Схемы взаимодействий: Детерминированные и стохастические модели. М.: Изд-во МГТУ, 2008, 44 с. (Препринт архивирован http://hoster.bmstu.ru/~kalinkin/branching/interaction.zip).