

А. С. К а л и т в и н, В. А. К а л и т в и н (Липецк, ЛГПУ). **О применении конусных методов к изучению математических моделей двухсвязных марковских цепей.**

В фундаментальной работе [1] В.И. Романовский описал задачу двухсвязных марковских цепей, приводящуюся к интегральному уравнению

$$\lambda x(t_1, t_2) = \int_T m(t, t_1, t_2) x(t, t_1) dt \equiv (Mx)(t_1, t_2), \quad (1)$$

где параметр $\lambda > 0$, $T = [a, b]$, $t, t_1, t_2 \in [a, b]$, заданная и неизвестная функции неотрицательны, а интеграл понимается в смысле Лебега.

Уравнение (1) и соответствующее ему линейное неоднородное интегральное уравнение были исследованы В.И. Романовским в пространстве $C(D)$ непрерывных на $D = T \times T$ функций в предположении непрерывности заданных функций, при этом он использовал метод, аналогичный методу определителей Фредгольма. Интегральное уравнение Романовского (1) и более общие классы линейных операторов и уравнений типа Романовского в $C(D)$ и в $L^p(D)$ ($1 \leq p \leq \infty$) систематически изучались в [2].

Характерная особенность уравнения (1) связана с перестановкой переменных у неизвестной функции под знаком интеграла и дальнейшим интегрированием ее по одной из двух переменных. В силу этого оператор M — не интегральный и не вполне непрерывный даже в общем случае непрерывной функции m .

В математической модели, описываемой уравнением (1), $\lambda > 0$, $m \geq 0$, а x — ненулевая функция из конуса K неотрицательных функций из $C(D)$. Поэтому для исследования этой модели естественно использовать конусные методы (см., например, [3]).

Прежде всего отметим, что если ядро $m(t, t_1, t_2)$ принадлежит пространству $C(L)$ непрерывных по t_1, t_2 вектор-функций со значениями в $L = L^1(T)$, то M^2 — вполне непрерывный в $C(D)$ интегральный оператор [2]. Тогда спектр $\sigma(M)$ оператора M — не более, чем счетное множество, ненулевые точки которого являются собственными числами конечной кратности, а $0 \in \sigma(M)$.

Если, дополнительно, $m(t, t_1, t_2) \geq 0$, то M — положительный оператор в $C(D)$. Следовательно, его спектральный радиус $r(M) \in \sigma(M)$, причем в случае $r(M) > 0$ спектральный радиус является собственным числом, которому соответствует собственная функция в конусе K , т. е. при $\lambda = r(M)$ уравнение (1) имеет в K ненулевое решение. Условия, при которых $r(M) > 0$, получаются с применением признаков положительности спектрального радиуса интегрального оператора M^2 .

В [1] показано, что если $m(t, t_1, t_2) \geq 0$ — непрерывное стохастическое ядро оператора M , т. е.

$$\int_T m(t, t_1, t_2) dt_2 = 1,$$

то 1 является его собственным числом с собственной функцией из K , а все другие собственные числа по модулю меньше или равны 1, причем 1 — простое собственное число, большее модулей других собственных чисел, если $m(t, t_1, t_2) > 0$ или $m(t, t_1, t_2) = 0$ на множестве всех значений t, t_1, t_2 меры нуль. Более общее утверждение содержит следующая теорема.

Напомним [3], что действующий в $C(D)$ оператор A называется *u-ограниченным*, где $u \in K$, $u \neq 0$, если $\alpha(x)u \leq Ax \leq \beta(x)u$ для любого $x \in K$, причем $\alpha(x), \beta(x) > 0$ при $x \neq 0$.

Теорема. Если неотрицательное ядро $m \in C(L)$ и M^2 есть *u-ограниченный оператор* в $C(D)$, то $\lambda = r(M)$ — простое собственное число с единственной нормированной собственной функцией из K , а положительные $\lambda \neq r(M)$ не имеют собственных функций в K .

Отметим, что если

$$u(t_1, t_2)f(t, t') \leq m(t, t_1, t_2)m(t, t', t_1) \leq u(t_1, t_2)g(t, t'), \quad (2)$$

где u, f и g — ненулевые функции из K , то M^2 — u -ограниченный оператор в $C(D)$. Неравенство (2), очевидно, выполнено, если $0 < c \leq m(t, t_1, t_2) \leq d$, где c и d — некоторые постоянные.

В условии теоремы уравнение (1) при $\lambda = r(M)$ имеет единственное нормированное решение в K , а при положительных $\lambda \neq r(M)$ не имеет в K ненулевых решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Romanovskij V.* Sur une classe d'équations intégrales linéaires. — Acta mathematica, 1932, v. 59, p. 99–208.
2. *Калитвин А. С.* Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2007, 195 с.
3. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. М.: Наука, 1985, 256 с.