

А. С. К а л и т в и н, В. А. К а л и т в и н (Липецк, ЛГПУ). **Один метод численного решения интегрального уравнения Романовского двухсвязных марковских цепей.**

В работе, представленной данным сообщением, рассматривается численное решение интегрального уравнения Романовского

$$x(t, s) = \lambda \int_T m(t, s, \sigma) x(\sigma, t) d\sigma + f(t, s) \equiv (\lambda Mx)(t, s) + f(t, s), \quad (1)$$

где $T = [a, b]$, $t, s \in T$, заданные функции f и m непрерывны на $D = T \times T$ и $D \times T$ соответственно, а неизвестная функция x принадлежит пространству непрерывных на D функций. К уравнению (1) с $f(t, s) \equiv 0$ приводится задача двухсвязных цепей Маркова [1].

Найти явное решение уравнения (1) удастся в редких случаях, а при непосредственном применении пакетов математических программ возникают проблемы решения получающихся при этом линейных матричных уравнений [2]. Поэтому уравнение (1) сводится к системе двух линейных интегральных уравнений с двумя неизвестными функциями, одна из которых при перестановке аргументов не изменяет своих значений, а другая изменяет только знак. Интегральные уравнения системы можно рассматривать как уравнения с параметром, для построения решения системы применять методы численного решения интегральных уравнений, связанные с квадратурными формулами, а получающиеся системы линейных алгебраических уравнений решать с использованием пакетов математических программ.

Пусть $y(t, s) = (x(t, s) + x(s, t))/2$, $z(t, s) = (x(t, s) - x(s, t))/2$, $g(t, s) = (f(t, s) + f(s, t))/2$, $h(t, s) = (f(t, s) - f(s, t))/2$, $k(t, s, \sigma) = (m(t, s, \sigma) + m(s, t, \sigma))/2$, $l(t, s, \sigma) = (m(t, s, \sigma) - m(s, t, \sigma))/2$. Тогда $x = y + z$, $f = g + h$, $m = k + l$, $y(t, s) = y(s, t)$, $z(t, s) = -z(s, t)$, $g(t, s) = g(s, t)$, $h(t, s) = -h(s, t)$, $k(t, s, \sigma) = k(s, t, \sigma)$, $l(t, s, \sigma) = -l(s, t, \sigma)$, а уравнение (1) записывается в виде системы

$$\begin{cases} y(t, s) = \lambda \int_T k(t, s, \sigma) y(t, \sigma) d\sigma - \lambda \int_T l(t, s, \sigma) z(t, \sigma) d\sigma + g(t, s), \\ z(t, s) = \lambda \int_T l(t, s, \sigma) y(t, \sigma) d\sigma - \lambda \int_T k(t, s, \sigma) z(t, \sigma) d\sigma + h(t, s), \end{cases} \quad (2)$$

в которой неизвестные функции удовлетворяют дополнительным условиям

$$y(t, s) = y(s, t), z(t, s) = -z(s, t). \quad (3)$$

Если $1/\lambda$ не принадлежит спектру оператора M , то уравнение (1) имеет единственное решение. Тогда единственное решение имеет и система (2). Численное построение этого решения зависит от выбора квадратурных формул для вычисления интегралов в уравнениях системы. Например, при использовании формулы левых прямоугольников отрезок $[a, b]$ разбивается на n равных частей точками $t_i = s_i = \sigma_i = a + ih$, где $h = (b - a)/n$, $i = 0, 1, \dots, n$, а система (2) заменяется системой

$$\begin{cases} y_{ij} = \lambda h \left(\sum_{p=0}^{n-1} k_{ijp} y_{ip} - \sum_{p=0}^{n-1} l_{ijp} z_{ip} \right) + g_{ij}, \\ z_{ij} = \lambda h \left(\sum_{p=0}^{n-1} l_{ijp} y_{ip} - \sum_{p=0}^{n-1} k_{ijp} z_{ip} \right) + h_{ij}, \end{cases}$$

где $y_{ij} = y(t_i, s_j)$, $z_{ij} = z(t_i, s_j)$, $g_{ij} = g(t_i, s_j)$, $h_{ij} = h(t_i, s_j)$, $k_{ijp} = k(t_i, s_j, \sigma_p)$, $l_{ijp} = l(t_i, s_j, \sigma_p)$, $i, j, p = 0, 1, \dots, n - 1$, которая решается при каждом фиксированном $i =$

$0, 1, \dots, n-1$, т.е. ее решение сводится к решению n систем линейных алгебраических уравнений. Проверка равенств (3) сводится к оценке малости числа

$$\delta = \max_{i,j} (|y_{ij} - y_{ji}| + |z_{ij} + z_{ji}|).$$

Если δ достаточно мало, то значения решения уравнения (1) в точках (t_i, s_j) , $i, j = 0, 1, \dots, n-1$, вычисляются по формуле

$$x(t_i, s_j) = y_{ij} + z_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Описанный алгоритм численного решения уравнения (1) легко реализуется в пакетах Mathcad и Scilab.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Романовский В. И.* Избранные труды. Т. 2. Теория вероятностей, статистика и анализ. Ташкент: Наука, 1964, 390 с.
2. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* О численном решении уравнения Романовского. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 5, с. 889–890.