Г. С. Камбарбаева (Москва, МГУ). **Оценка стоимости опциона на право обменять один актив на другой с учетом количества обмениваемых единиц активов.**

В качестве критерия для определения того, дешев или дорог в данный момент времени данный финансовый инструмент (ФИ), используется безарбитражная цена ФИ. Один из основных подходов к расчетам безарбитражных цен заключается в том, чтобы принять цену ФИ за случайный процесс, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения (СДУ).

В [1]–[4] изложен случай, когда данный метод применен к оценке стоимости опциона на право обмена одного актива на другой. При этом на функцию стоимости опциона накладывалось условие однородности, которое означало, что право обменять λ единиц актива 2 на λ единиц актива 1 должно стоить в λ раз больше, чем право обменять одну единицу на одну. При такой схеме обмена нет зависимости цены от количества единиц активов, участвующих в одной операции. В действительности на рынке ценных бумаг мы не наблюдаем прямо пропорциональной зависимости цены опциона от количества ценных бумаг. Стоимость обмена оптом зависит от различных характеристик активов, участвующих в операции. В работе, представленной данным сообщением, рассматривается модель оценки права обменять один актив на другой с учетом количества обмениваемых активов.

Пусть случайные процессы $P(t)$ и $Q(t)$ — цены двух активов, являющиеся решениями СДУ

$$dP(t)=\mu_1(t)P(t)\,dt+\nu_1(t)P(t)\,dz_t, \quad dQ(t)=\mu_2(t)Q(t)\,dt+\nu_2(t)Q(t)\,dz_t,$$

где z_t — стандартное броуновское движение, одно и то же для обоих уравнений.

Пусть $\omega(P(t),Q(t),t)$ — стоимость в момент времени t опциона, дающего право в момент времени T обменять второй актив на первый. Нашей целью является нахождение функции $\omega(\lambda p,\lambda q,t)$, дающей стоимость опциона на право обмена λ единиц актива 1 на λ единиц актива 2 в момент времени $t<T$ при $P(t)=p$, $Q(t)=q$. На функцию $\omega(p,q,t)$ накладываем условие: $\omega(\lambda p,\lambda q,t)=\gamma\lambda\omega(p,q,t)$, где $\gamma>0$ — параметр, который может зависеть, вообще говоря, от различных характеристик активов, участвующих в сделке, т. е. $\gamma=\gamma(\lambda,p,q,t,\ldots)$.

Приведем случай, при котором получены наиболее интересные результаты.

Пусть $\gamma=\gamma(\lambda,p,q,T)=(p/q)^{\lambda-1}$. Тогда получаем стоимость опциона в любой момент времени $t\in[0,T]$:

$$\omega(\lambda p,\lambda q,t)=\left(\frac{p}{q^{\nu_1/\nu_2}}\right)^{\lambda-1}\lambda(pN(k)-qN(k-\sigma)),$$

где

$$k=\frac{\ln(p/q)}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}, \quad \sigma^2=\int_t^T(\nu_1(s)-\nu_2(s))^2\,ds, \quad N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-y^2/2}\,dy.$$

Сравним полученный результат со случаем, когда цена опциона не зависит от количества активов, участвующих в обмене:

$$\omega_0(\lambda p,\lambda q,t)=\lambda(pN(k)-qN(k-\sigma)).$$

Так как ν_1 и ν_2 — волатильности активов 1 и 2, то можно сказать, что цена опциона зависит от рискованности данных активов. По условию задачи $q<p$, но интересно отметить, что в случае $q<p<q^{\nu_1/\nu_2}$ стоимость опциона $\omega(\lambda p,\lambda q,t)$ меньше в сравнении со значением ω_0. Последнее неравенство выполняется, если ν_1 велико, а ν_2 мало. Таким образом, если риск актива 1 велик, то стоимость опциона

на право обмена второго актива на первый (рискованный) падает при увеличении количества обмениваемых активов. Если ν_1 и ν_2 приблизительно равны, т.е. $\nu_1/\nu_2 \approx 1$, то отношение p/q говорит о том, что цена опциона $\omega(\lambda p, \lambda q, t)$ отклоняется от значения ω_0 тем больше, чем сильнее различаются цены активов, участвующих в опционной сделке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шведов А. С.* Процентные финансовые инструменты: оценка и хеджирование. М.: ГУ ВШЭ, 2001.
2. *Hull J. C.*, *White A.* Bond Option Pricing Based on a Model for the Evolution of Bond Prices. — Advances in Futures and Options Research, 1993, v. 6, p. 1–13.
3. *Margrabe W.* The Value of an Option to Exchange One Asset for Another. —- Journal of Finance, 1978, v. 33, p. 177–186.
4. *Merton R. C.* The Theory of Rational Option Pricing. — Bell Journal of Economics and Management Science, 1973, v. 4, p. 141–183.