

В. Н. Колодежнов (Воронеж, ВГТА). **Область сходимости итерационного процесса для квадратичной функции с аргументом на множестве двойных чисел.**

Рассматривается система двойных чисел вида [1]:

$$Z = x + sy, \quad x, y \in \mathbf{R}, \quad s^2 = 1, \quad (1)$$

где x, y — компоненты двойного числа, принимаемые из множества $\mathbf{R}$ действительных чисел; s — базисная единица, представляющая собой аналог традиционной мнимой единицы для комплексных чисел. При этом под модулем двойного числа понимается величина $|Z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Прямым следствием условия (1) является наличие делителей нуля для двойных чисел.

По аналогии с функцией комплексной переменной может быть введена функция двойного числа $W(Z) = u(x, y) + sv(x, y)$. Применительно к простейшей нелинейной квадратичной функции $W(Z) = Z^2 + C$, где C — постоянное заданное двойное число, был рассмотрен итерационный процесс вида

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C, \quad n = 1, 2, \dots, \quad Z_1 = 0. \quad (2)$$

Изучался вопрос о сходимости на множестве двойных чисел такого итерационного процесса в плоскости параметра $C = c_x + sc_y$. По аналогии с соответствующей теоремой из комплексной динамики [2], для двойных чисел может быть доказано (с непринципиальными изменениями) следующее утверждение.

Теорема. Пусть $|C| < 2$. Если для некоторого номера k выполняется условие $|Z_k| \geq 2$, то итерационный процесс (2) расходится, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} |Z_n| = \infty$.

Последняя теорема позволяет реализовать для двойных чисел хорошо известный для комплексных чисел алгоритм построения области сходимости итерационного процесса (2). На основе численных экспериментов установлено, что область сходимости в плоскости параметра C имеет форму «квадрата» и представлена на рис. 1. При этом вершины A_1 и A_3 этого «квадрата» имеют координаты, равные $(0, 25, 0)$ и $(-2, 0)$, соответственно.

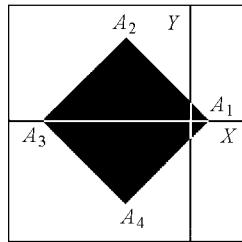


Рис. 1

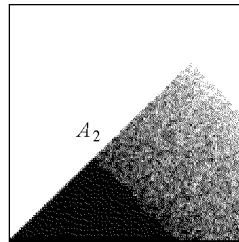


Рис. 2

Заметим, что итерационный процесс типа (2), но применительно к комплексным числам, приводит к построению множества Мандельброта. Интересным является то, что координаты граничных точек множества Мандельброта вдоль действительной оси абсцисс совпадают с координатами точек A_1 и A_3 , хотя формы множеств существенно различаются.

Одной из особенностей границ множества, представленного на рис. 1, является то, что стороны A_2A_3 и A_3A_4 являются вполне детерминированными. Что же касается двух других сторон, то здесь граница области «покрыта» слоем типа «пыли Кантора». Для примера на рис. 2 представлена область размером $2 \cdot 10^{-11} \times 2 \cdot 10^{-11}$ в окрестности вершины A_2 , построенная для числа итераций, равного 10000. Толщина этого слоя «пыли Кантора» снижается и стремится к нулю по мере удаления от вершины A_2 в направлении к вершине A_1 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973, 144 с.
2. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000, 352 с.