Е. Г. Крюкова (Волгоград, ВолГУ). **Применение теории фильтрации для прогнозирования траектории движения цены акции.**

Рассмотрим процесс движения цены акции как вектор состояния $x_t \in \mathbf{R}^1$ ($t \in [0,T]$) на стохастическом базисе $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t = (\mathcal{F})_{t\geqslant 0}, \mathbf{P}\}$, где Ω — пространство непрерывных функций $x = (x_t)_{t\geqslant 0}$, с потоком таких неубывающих σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, что $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, если $s < t$, где $\mathcal{F}_t$ — вектор наблюдаемых цен акции до момента времени T, $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$, удовлетворяющий системе линейных дифференциальных уравнений Ито

$$dx_t = x_t(\mu_t\,dt + \sigma_t\,dw_t), \tag{1}$$

μ_t — гауссовская мера, определяемая соотношением $\mu_t = ln(x_t/x_{t-1})$ со стандартным отклонением σ_t; $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ — стандартный винеровский процесс. Наблюдаемую последовательность изменения доходности акции $\xi = (\xi)_t = dX_t/X_t$ представим в виде

$$\xi_t = \theta_t + \eta_t, \tag{2}$$

где полезный сигнал $\theta_t = \mu_t\,dt$, шум $\eta_t = \sigma_t\,dW$.

Пусть на стохастическом базисе $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t = (\mathcal{F})_{t\geqslant 0}, \mathbf{P}\}$ определены две совместно гауссовские случайные величины $\theta = \theta(w)$, $\xi = \xi(w)$, $w \in \Omega$, с соответствующими средними $\mathbf{E}\,\theta$, $\mathbf{E}\xi$ и дисперсиями $\mathbf{D}\,\theta$, $\mathbf{D}\,\xi$.

Применение теории фильтрации позволяет в каждый текущий момент времени t по реализации ξ_t (ξ_s, $0 < s < T$) находить с наименьшими погрешностями оценку текущих средних значений процесса и подготовить данные для прогноза координат траектории после окончания фильтрации.

Согласно [1], исходная гауссовская последовательность (θ, ξ) подчиняется линейной системе

$$\theta_{t+1} = \theta_t + b_1\widetilde{\varepsilon}_1(t+1), \quad \xi_{t+1} = \theta_t + \varepsilon_2(t+1), \tag{3}$$

где $b_1 = \sqrt{M(1+\theta_t)}$, $\{\widetilde{\varepsilon}_1(t)\}$ — некоторая последовательность некоррелированных случайных величин $\widetilde{\varepsilon}_1(t+1) = (1+\theta_t)\varepsilon_1(t+1)/\sqrt{M(1+\theta_t)_2}$, некоррелированные между собой белые шумы $\varepsilon_1 = (\varepsilon_1(t))$ и $\varepsilon_2 = (\varepsilon_2(t))$ — две независимые гауссовские последовательности с $\mathbf{M}\,\varepsilon_i(t) = 0$, $\mathbf{M}\,\varepsilon_i^2(t) = 1$, $t \geqslant 1$, такие, что $\theta_{n+1} + b_1\theta_n = \varepsilon_1(n)$, $\eta_{t+1} + b_2\eta_t = \varepsilon_2(t)$. Система (3) решается при таких начальных условиях, что условное распределение является гауссовским с параметрами $m_0 = M(\theta_0|\xi_0)$ и $\gamma_0 = \operatorname{cov}(\theta_0, \theta_0|\xi_0) = \mathbf{M}\,\gamma_0$. Оптимальную линейную оценку $m_t = M(\theta_t|\xi_0, \ldots, \xi_t)$ и ее ошибку $\gamma_t = \mathbf{M}\,(\theta_t - m_t)^2$ находим из уравнений фильтра Калмана–Бьюиси, когда помехой является белый шум [2]:

$$m_{t+1} = m_t + \frac{\gamma_t}{1+\gamma_t}[\xi_{t+1} - m_t], \quad \gamma_{t+1} = (\gamma_t + b_1^2) - \frac{\gamma_t}{1+\gamma_t}.$$

Согласно теореме о нормальной корреляции [3, с. 55], принимаем начальные условия: $m_\theta(0) = M\,\theta_0$, $\gamma_0 = \mathbf{D}\,\theta_0$ при $\theta_0 = 0$.

Полученная с помощью фильтра Калмана–Бьюиси оптимальная линейная оценка последовательности изменения доходности акции позволяет построить авторегрессионную модель будущих значений доходности со статистически значимыми коэффициентами и получить адекватный прогноз ожидаемых значений средневзвешенных цен акций в среднесрочной перспективе. Методика опробирована на примере построения модели авторегрессии оптимальной линейной оценки доходности средневзвешенных дневных цен обыкновенных акций Сбербанка. Показатель автомодельности Харста наблюдаемых значений доходности, найденный по методике [1], для серии наблюдений от 5 до 90 дней $H = 0,95$. Это свидетельствует о наличии сильной зависимости данных последующих наблюдений от предыдущих значений.

Для 82 значений цены, наблюдаемых с 15 августа 2006 г., модель авторегрессии (AR1) имеет вид: $\overline{x}_t = 0,004883 - 0,290521\, x_{t-1}$. Вычисленный уровень значимости коэффициентов модели p меньше заданного $\alpha = 0,05$, гипотеза о равенстве коэффициентов модели нулю отклоняется, модель значима. Выборочное значение статистики Фишера меньше квантили распределения Фишера $(1,70 < 5,56)$. Гипотеза об адекватности модели принимается на уровне значимости $\alpha = 0,05$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. М.: Фазис, 1998, 512 с.
2. *Розов А. К.* Стохастические дифференциальные уравнения и их применение. СПб.: Политехника, 2005, 303 с.
3. *Liptser R. S.*, *Shiryaev A. N.* Statistics of Random Processes. I. General Theory. V. 5. Berlin: Springer, 2000, 425 p.