А. В. К у л и к о в (Москва, МГУ). **Согласованность с пространством, инвариантность по распределению многомерных мер риска и многомерные аналоги хвостового $V@R$.**

В работе, представленной данным сообщением, рассматриваются свойства многомерных когерентных мер риска. Пусть X — многомерный случайный вектор, т. е. X^i — количество i-й валюты в портфеле в момент времени 1, K: $\Omega \to \mathcal{K}$ — измеримое отображение, где $\mathcal{K}$ — множество таких непустых замкнутых конусов C, что $C \neq \mathbf{R}^d$, $C + \mathbf{R}^d_- = C$ (множество случайных портфелей, которые можно получить из нулевого). Введем частичное отношение порядка на множестве портфелей по формуле: $X \preceq Y$, если $X(\omega) - Y(\omega) \in K(\omega)$ для п. в. ω. Пусть $\mathcal{C}$ — множество непустых выпуклых замкнутых множеств на $\mathbf{R}^d$.

Тогда *многомерная когерентная мера риска на* $(L^0)^d$, *согласованная с конусом* K, — отображение ρ: $(L^0)^d \to \mathcal{C} \cup \{\varnothing\}$, заданное следующим образом: $\rho(X) = -l\{x \in \mathbf{R}^d\colon \sum_{i=1}^d \mathbf{E}\, x^i Z^i \leqslant \sum_{i=1}^d \mathbf{E}\, X^i Z^i$ для всех $Z \in \mathcal{D}\}$, где $\mathcal{D}$ — множество таких d-мерных случайных величин $Z \in (L^1_+)^d$, что $Z(\omega) \in K^*(\omega)$ $\mathbf{P}$-п. н. С финансовой точки зрения, $\rho(X)$ — множество неслучайных портфелей $x \in \mathbf{R}^d$, которые делают позицию $X + x$ безрисковой.

Теперь изменим масштаб вдоль каждой из осей путем умножения на $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^d) \in \mathbf{R}^d_{++}$. Это означает, что $e_i^\gamma = e_i\, \gamma^i$. В новых осях портфель X^γ выглядит таким образом: $(X^\gamma)^i = X^i / \gamma^i$.

Используя эти изменения, определим многомерную когерентную меру риска ρ в новых осях (валютах) и обозначим ρ^γ. Рассмотрим важное свойство многомерных мер риска: результат согласован с изменениием масштаба вдоль осей (неважно, в какой базовой валюте мы измеряем риск).

О п р е д е л е н и е 1. Многомерная когерентная мера риска ρ на $(L^0)^d$ *согласована с пространством*, если для любых $X \in (L^0)^d$, $\gamma \in \mathbf{R}^d_{++}$ верно, что $\rho^\gamma(X^\gamma)\gamma = \rho(X)$, что означает, что для всех $X \in (L^0)^d$, $\gamma \in \mathbf{R}^d_{++}$ верно, что $x \in \rho(X)$ *если и только если* $x^\gamma \in \rho^\gamma(X^\gamma)$.

В работе рассмотрено еще одно важное свойство многомерных когерентных мер риска.

О п р е д е л е н и е 2. Многомерная когерентная мера риска ρ на $(L^0)^d$ *инвариантна по распределению*, если для любых таких $X, Y \in (L^0)^d$, что $(X, K) \overset{\mathrm{Law}}{=} (Y, K)$, выполнено $\rho(X) = \rho(Y)$.

Рассмотрим $\rho_\lambda(X)$ — средний V@R уровня λ из [2, п. 4.3], $\widetilde{\rho}_\lambda(X)$ — хвостовой V@R уровня λ из [4, п. 5], WCE_λ — худшее условное математическое ожидание уровня λ из [5, п. 2.5]. Эти меры являются многомерными аналогами хвоствого V@R, введенного в [1]. Тогда ρ_λ инвариантен по распределению, но не пространственно согласован, $\widetilde{\rho}_\lambda$ инвариантен по распределению и пространственно согласован, WCE_λ пространственно согласован, но не инвариантен по распределению. Исследованы и другие свойства этих мер риска. Приведем один из результатов.

Теорема. *Если* $\mathbf{P}$ *— вероятностная мера без атомов*, K *— постоянная полуплоскость, то* $WCE_\lambda(X) = \rho_\lambda(X) = \widetilde{\rho}_\lambda(X)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Artzner P.*, *Delbaen F.*, *Eber J.-M.*, *Heath D.* Coherent measures of risk. — Mathematical Finance, 1999, v. 9, № 3, p. 203–228.
2. *Hamel A. H.*, *Heyde F.*, *Hohne M.* Set-valued Measures of Risk. Preprint № 15-2007. Halle: Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Institut für Matematik, 2007.
3. *Jouini E.*, *Meddeb M.*, *Touzi N.* Vector-valued coherent risk measures. — Finance and Stochastics, 2004, v. 8, № 4, p. 531–552.
4. *Куликов А. В.* Многомерные когерентные и выпуклые меры риска. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, v. 52, № 3, с. 576–602.