

М. М. Л е р и (Петрозаводск, ИПМИ КарНЦ РАН). **Об устойчивости случайных графов Интернет-типа.**

Использование такой математической структуры, как случайный граф для описания сложных сетей передачи данных (в частности, сети Интернет), в последнее время открыло целый ряд задач, связанных с описанием структуры и функционирования таких объектов [1, 2]. Так, определенный интерес вызывают вопросы устойчивости случайных графов к внешним воздействиям, таким как случайное или направленное удаление вершин.

В работе рассматривается случайный граф Интернет-типа, степени вершин которого представляют собой независимые одинаково распределенные случайные величины, распределение которых является дискретным аналогом распределения Парето:

$$\mathbf{P}\{\xi \geq k\} = k^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \tau \in (1, 2), \quad (1)$$

где N — общее число вершин графа и вершины соединяются между собой равновероятно. Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ случайные величины, соответствующие объемам компонент графа и расположенные в порядке их убывания, s — общее число компонент. Известно [1, 2], что такой граф имеет гигантскую компоненту связности, размер которой пропорционален N . Под критерием разрушения графа будем понимать наступление события $A: \{\eta_1 \leq 2\eta_2\}$. Через p обозначим оценку вероятности $\mathbf{P}\{A\}$.

Рассматривается вопрос устойчивости графов Интернет-типа к такому внешнему воздействию, как направленное удаление вершин. Цель работы состояла в экспериментальном изучении изменений свойств структуры таких графов при последовательном удалении из них вершин, имеющих максимальную степень. Основным методом исследования был метод Монте-Карло. Эксперименты проводились для 3-х значений N размерности графа: 10^3 , $3 \cdot 10^3$, $5 \cdot 10^3$ и 9-ти значений параметра τ из отрезка $(1, 2)$ с интервалом в $0,1$, не включая концы отрезка (по 100 случайных графов на каждый набор значений N и τ).

На основании экспериментальных данных были получены регрессионные зависимости объема гигантской компоненты η_1 и второй по размеру компоненты η_2 случайного графа Интернет-типа в процентах от размера графа N , параметра распределения степеней вершин τ и процента удаленных вершин r , а также зависимости общего числа компонент s от тех же параметров. Было установлено, что с ростом числа удаленных из графа вершин, объем гигантской компоненты η_1 уменьшается, а объем второй компоненты η_2 растет линейным образом, при этом число компонент также растет линейно.

Была оценена вероятность наступления события A , и была получена следующая регрессионная зависимость:

$$p = \begin{cases} 0, & \text{при } \ln r < 1,39 - \tau, \\ -0,2 + 0,05re^\tau, & \text{при } 1,39 - \tau \leq \ln r \leq 3,178 - \tau, \\ 1, & \text{при } \ln r > 3,178 - \tau. \end{cases} \quad (2)$$

Так, вероятность разрушения графа будет равна 0 при $\tau = 1,1$ для всех $r < 1,34$, а при $\tau = 1,9$ для $r < 0,6$; и $p = 1,0$ для $r > 8,0$ при $\tau = 1,1$, а при $\tau = 1,9$ для $r > 3,6$. Таким образом, чем ближе значение параметра τ распределения степеней вершин графа Интернет-типа к 1, тем граф оказывается более устойчивым к такому внешнему воздействию, как направленное удаление вершин максимальной степени, и, соответственно, чем ближе значение τ к 2, тем, в данных условиях, граф разрушится быстрее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. — *Performance Evaluation*, 2004, 55, p. 3–23.
2. *Павлов Ю. Л.* Предельное распределение объема гигантской компоненты в случайном графе Интернет-типа. — *Дискретная математика*, 2007, т. 19, в. 3, с. 22–34.