В. Н. Лесев (Нальчик, КБГУ). Динамика профиля поверхности малой капли свинца под действием температурного поля.

Будем исследовать влияние температурного режима на кинетику профиля свободно лежащей жидкой капли расплава свинца с малыми добавками лития на горизонтальной графитовой подложке. Механическое условие равновесия рассматриваемой системы может быть записано в виде

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),\tag{1}$$

где ΔP — разность давлений на поверхности капли, σ — поверхностное натяжение, R_1 и R_2 — два главных радиуса кривизны.

При отсутствии любых внешних усилий, кроме силы тяжести и температуры, ΔP может быть выражено как линейная функция [1]:

$$\Delta P = \Delta P_0 + g \, z \, \Delta \rho, \tag{2}$$

где ΔP_0 — разность давлений на плоскости z = 0, g — ускорение свободного падения, $\Delta \rho$ — разность плотностей капли и газа, z — вертикальная координата точки принадлежащей поверхности капли.

Предполагая симметричность капли относительно вертикальной ос
иz,для R_1 и $R_2,$ будем иметь

$$R_1 \, d\varphi = d\ell, \quad R_2 \sin \varphi = x,\tag{3}$$

где ℓ — длина дуги,
 x — горизонтальная координата, φ — угол отклонения касательной к поверхности капли от ос
иOx.

Принимая во внимание осевую симметрию капли, можем записать $R_1=R_2=R=1/b,$ гдеR и b— радиус кривизны и кривизна вначале, соответственно.

При $\ell = 0$ из (1) для давления может быть получено выражение

$$\Delta P_0 = 2 \, b \, \sigma. \tag{4}$$

Подставляя (3), (4) в (1) и принимая во внимание (2), находим

$$\frac{d\varphi}{d\ell} = 2b + cz - \frac{\sin\varphi}{x},\tag{5}$$

где $c = g \Delta \rho / \sigma$ — капиллярная постоянная, принимающая положительные значения для капель, лежащих на подложке, и отрицательные — для свисающих.

Уравнение (5) вместе с геометрическими соотношениями

$$\frac{dx}{d\ell} = \cos\varphi, \quad \frac{dz}{d\ell} = \sin\varphi, \quad \frac{dV}{d\ell} = \pi x^2 \sin\varphi, \quad \frac{dS}{d\ell} = 2\pi x, \tag{6}$$

для x, z, φ , объема V, площади поверхности S как функций длины дуги ℓ , дает систему дифференциальных уравнений первого порядка с условиями

$$x(0) = z(0) = \varphi(0) = V(0) = S(0) = 0, \quad \left. \frac{d\varphi}{d\ell} \right|_{\ell=0} = b.$$
(7)

Решение системы (5), (6) с условиями (7) проводилось методом Рунге–Кутта четвертого порядка в пакете MATLAB. Результаты некоторых из проведенных вычислительных экспериментов показаны на рис. 1, 2.





На рис. 1 представлены профили капли массой 1,9906 г. расплава свинца с 0,03 процентным содержанием лития на графитовой подложке при температурах 685° К, 933° К и 1165° К, а на рис. 2 — профили капли массой 1,9401 г. при тех же температурах, но с 0,5 процентным содержанием лития.

Расчеты показывают, что кинетика профиля поверхности свободной капли свинца под действием температуры представляет собой нелинейный процесс, который существенно зависит от массы капли и содержания в ней лития.

Используемая расчетная схема при проведении оцифровки экспериментально полученных снимков позволяет на основе геометрических характеристик профиля поверхности устанавливать некоторые физические параметры системы. При этом на снимках фиксируются отклонения от равновесного профиля, вызванные пузырями внутри капли, ее неоднородностью, а также несимметричностью. В подобных случаях и на этапе распознавания границ объекта, даже при субпиксельном разрешении, избежать погрешности не удается. Результаты проведенных вычислений по оценке этой погрешности достаточно громоздки и могут служить темой отдельных исследований, выходящих за рамки настоящей работы.

В заключение отметим, что данные, полученные на основе большого количества вычислительных экспериментов, позволяют утверждать, что указанный подход дает возможность решать как прямую, так и обратную задачи. Кроме этого, при решении обратной задачи появляется возможность судить о точности полученных таким образом результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

 Hoorfar M., Neumann A. W. Recent progress in Axisymmetric Drop Shape Analysis. — Advances in Colloid and Interface Science, 2006, v. 121, p. 25–49.