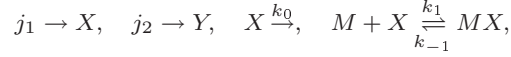


А. Е. Л е т н е в а (Самара, СМУН). **Периодическое решение на примере модели универсального осциллятора.**

Рассматривается модель универсального осциллятора, которая была предложена Зеелигом [1]. Общая реакция имеет вид $X + Y \rightarrow P + Q$ и подвержена воздействию катализатора M , который может, например, быть ферментом.

Субстраты X и Y подаются постоянными потоками j_1 и j_2 . Субстрат X осуществляет субстратное ингибирование путем извлечения части активного катализатора с образованием инертного комплекса MX_2 . Схема реакций имеет вид:



Представляем кинетические уравнения, описывающие работу универсального осциллятора с субстратным ингибированием, в безразмерном виде, и преобразовываем полученную систему

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial \tau} = J_1 - x_1 + \beta\delta - \beta y_1(x_1 + \delta) + \beta y_2(1 - \alpha x_1 - \delta), \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau} = J_2 - \gamma x_2 y_2, \\ \varepsilon \frac{\partial y_1}{\partial \tau} = -x_1 y_1 + y_2(1 + x_2), \\ \varepsilon \frac{\partial y_2}{\partial \tau} = \delta + y_1(x_1 - \delta) - y_2(1 + \alpha x_1 + \delta + x_2). \end{cases} \quad (1)$$

Будем предполагать, что необратимые реакции в универсальном осцилляторе очень медленные по сравнению с обратимыми. Тогда два последних уравнения содержат малый параметр ε при производных и система (1) является сингулярно возмущенной. Эта система имеет двумерную инвариантную притягивающую поверхность [2]

$$y_1 = \phi_1(x_1, x_2, \varepsilon), \quad y_2 = \phi_2(x_1, x_2, \varepsilon), \quad (2)$$

движения по которой описываются системой

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial \tau} = J_1 - x_1 + \beta\delta - \beta\phi_1(x_1 + \delta) + \beta\phi_2(1 - \alpha x_1 - \delta), \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau} = J_2 - \gamma x_2 \phi_2. \end{cases} \quad (3)$$

Далее можно найти особую точку получившейся системы (обозначим ее $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$):

$$\left(J_1 - \frac{\beta}{\gamma} J_2, \frac{J_2(1 + J_1 - (\beta/\gamma)J_2 + (\alpha/\gamma)(J - (\beta/\gamma)J_2)^2)}{\gamma(J_1 - (\beta/\gamma)J_2) - J_2} \right). \quad (4)$$

Из теоремы Андронова–Хопфа о бифуркации цикла получаем ограничения на значения параметров $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$:

$$\tilde{x}_1^2 > (1 + \tilde{x}_2) \left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^{-1}.$$

При таких значениях параметров периодическое решение системы существует и является устойчивым.

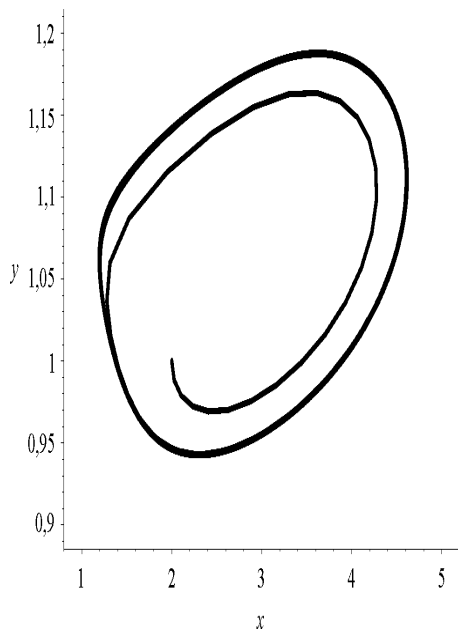


Рис. 1. Предельный цикл при $\tilde{x}_1 = 2$; $\tilde{x}_2 = 1$; $\alpha = 1$; $\delta = 1$; $\beta = 39$; $\gamma = 1, 1$; $J_1 = 47/4$; $J_2 = 1/4$

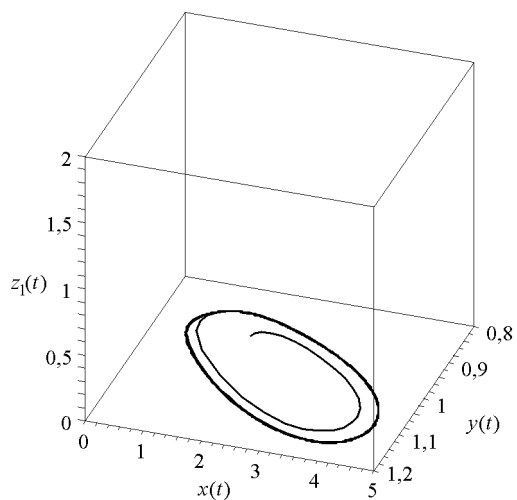


Рис. 2. Проекция предельного цикла полной системы на ось y_2 при $\tilde{x}_1 = 2$; $\tilde{x}_2 = 1$; $\alpha = 1$; $\delta = 1$; $\beta = 39$; $\gamma = 1, 1$; $J_1 = 47/4$; $J_2 = 1/4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.
2. Стрыгин В. В., Соболев В. А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988.