

А. В. Неклюдов (Москва, МГТУ). **Об оценке среднего по сфере значения решения эллиптического уравнения второго порядка через его поток.**

Пусть во внешности n -мерного шара $\Omega = \{x: |x| > R_0\}$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, задано равномерно эллиптическое уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f(x). \quad (1)$$

Коэффициенты уравнения предполагаются измеримыми функциями, обобщенные решения понимаются в смысле пространства Л. П. Соболева.

При исследовании поведения решения эллиптических уравнений в неограниченных областях важную роль играет понятие «потока тепла» ([1]–[3]) решения и его обобщения. Для решения уравнения (1) поток через сферу $S_r = \Omega \cap \{x: |x| = r\}$ равен

$$P(r, u) = \int_{S_r} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v_j dS,$$

где $(v_1, \dots, v_n)$ — единичная внешняя нормаль к S_r .

Рассмотрим среднее значение решения $u(x)$ на сфере S_r :

$$\bar{u}(r) = (w_n r^{n-1})^{-1} \int_{S_r} u dS,$$

где w_n — площадь единичной сферы в $\mathbf{R}^n$.

Представляет интерес связь между потоком $P(r, u)$ и средним значением $\bar{u}(r)$. Для неограниченного цилиндра оценка среднего значения решения эллиптического уравнения второго порядка на сечении цилиндра через поток была получена в [4]. В случае внешней области справедлив следующий результат.

Теорема. Пусть $u(x)$ — решение (1) в Ω . Тогда для почти всех $r > R_0$

$$\bar{u}(r) = \alpha(r)P(r, u)U(r) - \int_{R_0 < |x| < r} fV dx + \beta(r, u),$$

где $0 < C_1 \leq \alpha(r) \leq C_2$; $U(r) = \ln r$ в случае $n = 2$, $U(r) = r^{2-n}$ в случае $n \geq 3$; $V(x)$ — фундаментальное решение уравнения $Lu = 0$; $|\beta(r, u)| \leq \gamma(u) + C_4 r^{(3-n)/2} (\int_{S_r} |\nabla u|^2 dS)^{1/2}$; $C_k = \text{const} > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Олейник О. А., Иосифян Г. А. О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей. — Математический сборник, 1980, т. 112, № 4, с. 588–610.
2. Oleinik O. A., Yosifian G. A. On the asymptotic behavior at infinity of solutions in linear elasticity. — Archive Rat. Mech. and Analysis, 1982, v. 78, p. 29–53.
3. Неклюдов А. В. О задаче Неймана для дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченной области, близкой к цилиндру. — Труды семинара им. Г. П. Петровского, 1991, т. 16, с. 192–217.
4. Неклюдов А. В. Оценка среднего значения решения эллиптического уравнения второго порядка через его поток. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 5, с. 918–919.