Т. В. Симонова (Самара, СамГУ). **Медленные интегральные многообразия со сменой устойчивости в модели связанных орегонаторов.**

Введение. Объектом рассмотрения является сингулярно возмущенная система ОДУ вида

$$\dot{x} = f(x, y, z, \varepsilon), \quad \dot{y} = g(x, y, z, \varepsilon), \quad \varepsilon\dot{z} = p(x, y, z, \alpha, \varepsilon), \tag{1}$$

где ε — малый положительный параметр, α — скалярный параметр, x — скалярная переменная, y и z — векторные переменные размерности n и $m+1$, соответственно.

В случае $n = 0$, $m = 0$ наличие дополнительного параметра α позволяет строить решения, называемые *траекториями-утками*. Под траекторией-уткой можно понимать траекторию сингулярно возмущенной системы, которая проходит вначале по устойчивому интегральному многообразию, а затем по неустойчивому.

Напомним, что под медленной поверхностью системы (1) понимается поверхность, описываемая уравнением

$$p(x, y, z, \alpha, 0) = 0. \tag{2}$$

Лист медленной поверхности устойчив, если собственные числа матрицы $\partial p/\partial z(x, y, \phi(x, y, \alpha), \alpha, 0)$, где $z = \phi(x, y, \alpha)$ — изолированное решение уравнения (2), имеют отрицательные вещественные части. Если хотя бы у одного из собственных чисел этой матрицы вещественная часть становится положительной, то лист теряет устойчивость. Листы медленной поверхности разделяются так называемыми *поверхностями срыва*, имеющими размерность вектора y, на которых

$$\det \frac{\partial p}{\partial z}(x, y, \phi(x, y, \alpha), \alpha, 0) = 0.$$

В ε-окрестности устойчивого и неустойчивого листов медленной поверхности лежат устойчивое и неустойчивое медленные интегральные многообразия. Медленное интегральное многообразие представляет собой гладкую инвариантную поверхность, движение по которой осуществляется со скоростью порядка единицы.

Наличие дополнительного скалярного параметра α обеспечивает условия для того, чтобы устойчивое и неустойчивое интегральные многообразия можно было склеить в одной точке поверхности срыва. Именно через эту точку проходит траектория, которая является уткой. Рассматривая параметр α как функцию переменной y, можно осуществить склейку во всех точках кривой срыва одновременно.

Основные результаты. В работе, представленной данным сообщением, рассматриваются автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений для переменных x, y и z, которые после исключения независимой переменной времени приводятся к виду

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= Y(x, y, z_1, z_2, \varepsilon), \qquad y \in \mathbf{R}^n, \quad x \in \mathbf{R}, \\
\varepsilon\frac{dz_1}{dx} &= 2x\beta(x, y)z_1 + Z_1(x, y, z_1, z_2, \varepsilon) + \alpha(y, \varepsilon), \qquad z_1 \in \mathbf{R}, \\
\varepsilon\frac{dz_2}{dx} &= B(x, y)z_2 + Z_2(x, y, z_1, z_2, \varepsilon) + \alpha(y, \varepsilon)b(x, y, \varepsilon), \qquad z_2 \in \mathbf{R}^m.
\end{aligned}$$

Здесь $B(x, y)$ — блочно-диагональная $(m \times m)$-матрица, собственные числа $\lambda_i(x, y)$ которой удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\lambda_i(x, y) \leqslant -2\omega < 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $b(x, y, \varepsilon) = (b_1(x, y, \varepsilon), \ldots, b_m(x, y, \varepsilon))^T$, ε — малый скалярный параметр, $\alpha(y, \varepsilon)$, $\beta(x, y)$ — скалярные функции, $Z_1(x, y, z_1, z_2, \varepsilon)$ — скалярная функция, а $Z_2(x, y, z_1, z_2, \varepsilon)$ — вектор-функция размерности m.

Функции $Y, Z_1, Z_2, \alpha, \beta, B$ предполагаются непрерывными и подчиняющимися неравенствам:

$$\|Y(x,y,z_1,z_2,\varepsilon)\| \leqslant k, \quad |Z_1(x,y,z_1,z_2,\varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon^2 + \varepsilon\|z\| + \|z\|^2), \tag{3}$$

$$\|Z_2(x,y,z_1,z_2,\varepsilon)\| \leqslant M(\varepsilon^2 + \varepsilon\|z\| + \|z\|^2), \tag{4}$$

$$\|Y(x,y,z_1,z_2,\varepsilon) - Y(x,\overline{y},\overline{z}_1,\overline{z}_2,\varepsilon)\| \leqslant M(\|y-\overline{y}\| + \|z-\overline{z}\|), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &|Z_1(x,y,z_1,z_2,\varepsilon) - Z_1(x,\overline{y},\overline{z}_1,\overline{z}_2,\varepsilon| \\ &\qquad\leqslant M\Big[(\varepsilon + \|\widetilde{z}\|)\|z-\overline{z}\| + (\varepsilon^2 + \varepsilon\|\widetilde{z}\| + \|\widetilde{z}\|^2)\|y-\overline{y}\|\Big], \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\|Z_2(x,y,z_1,z_2,\varepsilon) - Z_2(x,\overline{y},\overline{z}_1,\overline{z}_2,\varepsilon)\| \\ &\qquad\leqslant M\Big[(\varepsilon + \|\widetilde{z}\|)\|z-\overline{z}\| + (\varepsilon^2 + \varepsilon\|\widetilde{z}\| + \|\widetilde{z}\|^2)\|y-\overline{y}\|\Big], \end{aligned} \tag{7}$$

где $z = (z_1, z_2)^T$, $\overline{z} = (\overline{z}_1, \overline{z}_2)^T$, $\|\widetilde{z}\| = \max\{\|z\|, \|\overline{z}\|\}$,

$$|\alpha(y,\varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2 K, \tag{8}$$

$$0 < \beta_1 \leqslant \beta(x,y) \leqslant \beta_2 < +\infty, \quad \|b(x,y,\varepsilon)\| \leqslant \mu, \quad \|B(x,y) \leqslant M\|, \tag{9}$$

$$|\alpha(y,\varepsilon) - \alpha(\overline{y},\varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2 L\|y-\overline{y}\|, \tag{10}$$

$$|\beta(x,y) - \beta(x,\overline{y})| \leqslant \gamma\|y-\overline{y}\|, \quad \|b(x,y,\varepsilon) - b(x,\overline{y},\varepsilon)|\| \leqslant \nu\|y-\overline{y}\|, \tag{11}$$

$$\|B(x,y) - B(\overline{x},\overline{y})\| \leqslant M(|x-\overline{x}| + \|y-\overline{y}\|). \tag{12}$$

Здесь k, K, M, L, β_1, β_2, γ, μ, ν — некоторые положительные константы.

Отметим, что существует такая константа C, что

$$\|h(x,y,\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^{3/2} qC, \quad \|h(x,y,\varepsilon) - h(x,\overline{y},\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^{3/2} qC\|y-\overline{y}\|. \tag{13}$$

Теорема. *Пусть выполняются условия* (3)–(12). *Тогда существуют такие числа* q, δ, K, L, $\varepsilon_0 > 0$, *что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *существует функция* $\alpha(y,\varepsilon)$, *удовлетворяющая условиям* (8), (10), *и соответствующее ей медленное интегральное многообразие* $z = h(x,y,\varepsilon)$, *удовлетворяющее условиям* (13).

В качестве примера применения рассмотрена система пары связанных орегонаторов, для которой построено интегральное многообразие со сменой устойчивости и найдена склеивающая функция.

Работа поддержана РФФИ, проект № 07–01–00169а.