

А. Н. Т и м а ш е в (Москва, ТВП). **Об асимптотических разложениях для чисел m -арифметического треугольника.**

Рассматривается число $C_{m,k}^n$, стоящее на пересечении n -й строки и k -го столбца m -арифметического треугольника [1]. Производящая функция этих чисел имеет вид (см. [1], [2])

$$(1 + z + \dots + z^{m-1})^n = \sum_{k=0}^{(m-1)n} C_{m,k}^n z^k. \quad (1)$$

В частности, $C_{2,k}^n = C_n^k$ (при $m = 2$). Теория чисел $C_{m,k}^n$ наиболее полно излагается в [1], [2]. В [3] отмечается, что явная формула для этих чисел в указанных книгах отсутствует, и выводится такая формула, имеющая достаточно сложный вид в том смысле, что вычисления по ней при больших значениях параметров n , k затруднительны. В работе, представленной данным сообщением, получены некоторые асимптотические разложения чисел $C_{m,k}^n$ при $n, k \rightarrow \infty$ и фиксированном $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$.

Утверждение 1. Пусть ξ — случайная величина, имеющая распределение

$$\mathbf{P}\{\xi = j\} = \frac{1}{m}, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

Тогда кумулянты $\varkappa_s$ случайной величины ξ определяются из соотношений

$$\varkappa_1 = \mathbf{E}\xi = \frac{m-1}{2}, \quad \varkappa_{2\nu} = \frac{B_{2\nu}}{2\nu}(m_{2\nu} - 1), \quad \varkappa_{2\nu+1} = 0,$$

где $B_{2\nu}$ — числа Бернулли, $\nu = 1, 2, \dots$

З а м е ч а н и е 1. Приведенные соотношения для кумулянтов $\varkappa_s$ могут быть выведены из равенства

$$\ln \mathbf{E}(e^{z\xi}) = \frac{m-1}{2}z + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{\varkappa_s}{s!} z^s,$$

справедливого при $|z| < 2\pi/m$ (см. 5, с. 42)].

Утверждение 2. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, имеющие одинаковое распределение, совпадающее с распределением случайной величины ξ . Тогда

$$C_{m,k}^n = m^n \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_n = k\}, \quad k = 0, 1, \dots, (m-1)n. \quad (2)$$

При использовании равенств (2) доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $n \rightarrow \infty$, $m = \text{const} \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$ и пусть $k \rightarrow \infty$ так, что $k \in \mathbf{N}$,

$$k = \frac{1}{2} \left((m-1)n + x \sqrt{\frac{n(m^2-1)}{3}} \right), \quad |x| \leq C = \text{const}.$$

Тогда равномерно относительно $x \in [-C, C]$

$$C_{m,k}^n = m^n \sqrt{\frac{6}{\pi n(m^2-1)}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} \left(1 + \sum_{\nu=1}^l \frac{Q_{2\nu}(x)}{n^\nu} + O(n^{-l-1}) \right), \quad l = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $Q_{2\nu}(x)$ — некоторые многочлены от x , $\nu = 1, 2, \dots$

З а м е ч а н и е 2. Общий вид многочленов $Q_s(x)$ указан в [4, с. 173, формула (1.14)]. Коэффициенты многочлена $Q_s(x)$ зависят от кумулянтов $\varkappa_3, \dots, \varkappa_{s+2}$ и

многочленов Чебышева–Эрмита $H_{s+2}(x), \dots, H_{3s}(x)$, $s = 1, 2, \dots$. Из соотношений $\varkappa_{2\nu+1} = 0$ следует, что $Q_{2\nu-1}(x) = 0$, $\nu = 1, 2, \dots$. При $s = 2$

$$Q_2(x) = \frac{(x^4 - 6x^2 + 3)\varkappa_4}{24\varkappa_2^2} = -\frac{(m^2 + 1)(x^4 - 6x^2 + 3)}{20(m^2 - 1)},$$

поскольку $\varkappa_2 = \mathbf{D} \xi = (m^2 - 1)/12$, $\varkappa_4 = -(m^4 - 1)/120$, так что сумма в скобках в правой части равенства (3) при $l = 1$ равна $1 + Q_2(x)/n + O(n^{-2})$.

Теорема 2. Пусть $m = \text{const} \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$, и пусть $n, k \rightarrow \infty$ так, что $0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq k/n \leq \alpha_1 < m - 1$, α_0, α_1 — постоянные.

Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$C_{m,k}^n = \frac{z_0^{-k-1}(P(z_0))^n}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \left(1 + O(n^{-1})\right),$$

где $z = z_0$ — единственный положительный корень уравнения $\sum_{j=0}^{m-1} (j - \alpha)z^j = 0$; $P(z_0) = (1 - z_0^m)/(1 - z_0)$ при $z_0 \neq 1$ ($\alpha = (m - 1)/2$ при $z_0 = 1$); $\sigma^2 = z_0^{-2}((P(z_0))^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} j(j - 1)z_0^j - \alpha(\alpha - 1)) > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: 1969, с. 129–133, 245, 316–317.
2. Бондаренко Б. А. Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля, их фракталы, графы и приложения. Ташкент, 1990.
3. Оганян Р. А. Явная формула для чисел m -арифметического треугольника. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 3, с. 554–555.
4. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
5. Сачков В. Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М.: Наука, 1978.