**А. Н. Т ы р с и н, С. А. Т и м а ш е в, В. Д. П а з и й** (Челябинск, ЧелГУ). **Параметрическое оценивание линейных структурных соотношений между случайными величинами.**

Рассмотрим наиболее распространенный и практически важный случай одномерного структурного соотношения. Модель имеет вид

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X, \quad U = X + \xi, \quad V = Y + \varepsilon, \tag{1}$$

где коэффициенты $\beta_0$, $\beta_1$ — постоянные величины, причем $\beta_1 \neq 0$, $X$, $Y$, $\xi$, $\varepsilon$ — случайные величины, не коррелированные друг с другом, и $\mathbf{E}\,[\xi_i] = \mathbf{E}\,[\varepsilon_i] = 0$, $\mathbf{D}\,[\xi_i] = \sigma_\xi^2$, $\mathbf{D}\,[\varepsilon_i] = \sigma_\varepsilon^2$ для всех $i$.

Задача заключается в том, чтобы по результатам измерений $(u_i, v_i)$, $i = 1, \ldots, n$, оценить коэффициенты $\beta_0$ и $\beta_1$. В качестве априорной информации будем использовать коэффициент эксцесса $\gamma_\xi = \mu_4(\xi)/\sigma_\xi^4$.

В модели (1) неидентифицируемым является только коэффициент $\beta_1$, поскольку коэффициент $\beta_0$ находится элементарно через средние значения переменных $\overline{v}$ и $\overline{u}$. Получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными $\sigma_x^2$, $\sigma_\varepsilon^2$, $\beta_1$:

$$\begin{gathered} \operatorname{cov}(U,V) = \beta_1 \sigma_x^2, \quad \mathbf{E}\,(b_{11}) = \beta_{11} = \beta_1 \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_\xi^2}, \\ \mathbf{E}\,(b_{12}) = \beta_{12} = \beta_1 \frac{\mu_4(U) - 3\sigma_x^2\sigma_\xi^2 - \gamma_\xi \sigma_\xi^4}{\mu_4(U)}, \end{gathered} \tag{2}$$

где $b_{11}$ — оценка наименьших квадратов (МНК), а $b_{12}$ — оценка взвешенного метода наименьших квадратов (ВМНК):

$$b_{11} = \arg\min_b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (v_i' - b_1 u_i')^2, \quad b_{12} = \arg\min_b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 (v_i' - b_1 u_i')^2,$$

при $u_i' = u_i - \overline{u}$, $v_i' = v_i - \overline{v}$, $i = 1, \ldots, n$.

Теперь из системы (2) можем получить искомое значение $\beta_1$.

Поскольку теоретические значения моментов неизвестны, то вместо них в системе уравнений (2) используем выборочные оценки: $s_{uv} \approx \operatorname{cov}(U,V)$, $s_x \approx \sigma_x$, $s_\xi \approx \sigma_\xi$, $\overline{u}^4 \approx \mu_4(U)$, $b_1 \approx \beta_1$, $b_{11} \approx \beta_{11}$, $b_{12} \approx \beta_{12}$. При этом получим систему уравнений

$$s_{uv} = b_1 s_x^2, \quad b_{11}(s_x^2 + s_\xi^2) = b_1 s_x^2, \quad b_{12}\overline{u}^4 = (b_1 \overline{u}^4 - 3 s_x^2 s_\xi^2 - \gamma_\xi s_\xi^4)$$

относительно неизвестных $s_x$, $s_\xi$, $b_1$, которая решается аналогично системе (2).

Аналогичным образом можно решить задачу построения линейного многомерного структурного соотношения.

Работа поддержана РФФИ, проект № 07–01–96035 Урал-а.