

Н. Н. Шадрина (Чита, ЗабГГПУ). **О математической модели линейных динамических процессов в неоднородных анизотропных средах.**

Рассмотрим плоское движение одной абстрактной сплошной среды сквозь другую проницаемую среду, называемую фоном, когда поле потенциала u индуцирует поле скоростей $\vec{v}$. Следуя линейной модели, запишем общую линейную зависимость между компонентами векторов $\vec{v}$ и ∇u :

$$v_1 = k_{11}\partial_x u + k_{12}\partial_y u, \quad v_2 = k_{21}\partial_x u + k_{22}\partial_y u, \quad (1)$$

где $k_{ij}(x, y)$ — некоторые функции, не зависящие от течения и характеризующие свойства фона, x, y — декартовы координаты. Отсюда

$$\partial_x u = (k_{22}v_1 - k_{12}v_2)p^{-1}, \quad \partial_y u = (k_{11}v_2 - k_{21}v_1)p^{-1}, \quad (2)$$

где $p \equiv k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} \neq 0$. Фиксируя в точке $m_0(x_0, y_0)$ произвольное направление $\vec{s} = (\alpha_1, \alpha_2)$, рассмотрим всевозможные течения, для которых $\vec{v} \parallel \vec{s}$ в точке m_0 , т. е. $v_i = v\alpha_i$. Отсюда с учетом (2) найдем $v = k_s \partial_s u$, где

$$k_s = pq^{-1}, \quad q = k_{22}\alpha_1^2 - (k_{12} + k_{21})\alpha_1\alpha_2 + k_{11}\alpha_2^2. \quad (3)$$

Равенство $v = k_s \partial_s u$ совпадает с известными одномерными экспериментальными законами Фурье, Дарси, Нернста в соответствующих теориях [1], т. е. выбранная линейная модель соответствует реальным процессам переноса. При этом $k_s > 0$, т. к. вектор скорости вдоль линии тока направлен в сторону возрастания потенциала (убывания температуры, давления, концентрации). Отсюда выводятся неравенства $k_{ii} > 0$, $i = 1, 2$, $p > 0$, и уравнение эллипса анизотропии $k_{22}\eta_1^2 - (k_{12} + k_{22})\eta_1\eta_2 + k_{11}\eta_2^2 = p$, где $\eta_i = \sqrt{k_s}\alpha_i$. Вычисляя компоненты скорости v_i в произвольной криволинейной системе координат, установим, что коэффициенты k_{ij} (1) образуют контравариантный тензор второго ранга.

Пусть ось y в точке m_0 направлена вдоль большей оси эллипса анизотропии. Отсюда в уравнении эллипса анизотропии

$$k_{12} + k_{21} = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим в данной среде течение, для которого вектор ∇u в точке m_0 направлен вдоль оси y , т. е. $\nabla u = (0, \partial_y u)$. При этом должно быть $\vec{v} \parallel \nabla u$, т. е. $0 = k_{12}\partial_y u$ (1) (частицы подвижной среды должны двигаться в сторону большей проницаемости и большего перепада потенциала). Отсюда, поскольку коэффициенты k_{ij} не зависят от течения, с учетом (4) получим $k_{12} = k_{21} = 0$, т. е. тензор проницаемости симметричен. Итак, для коэффициентов формально выписанной системы (1) имеют место условия $k_{ii} > 0$, $k_{11}k_{22} - k_{12}^2 > 0$, $k_{12} = k_{21}$.

Из уравнения неразрывности для установившихся процессов $\text{div } \vec{v} = 0$ с учетом (1) получим уравнение эллиптического типа $\partial_x(k_{11}\partial_x u + k_{12}\partial_y u) + \partial_y(k_{12}\partial_x u + k_{22}\partial_y u) = 0$, которое в случае постоянных k_{ij} подстановкой $\xi = x - k_{12}k_{22}^{-1}y$, $\eta = \sqrt{pk_{22}^{-1}}y$ приводится к уравнению Лапласа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974, 431 с.