

А. В. Шаповалов (Москва, ТВП). Совместность и алгоритм распознавания несовместности реализаций случайной системы псевдобоулевых уравнений.

Пусть $\Phi_i = \{f_{i,1}, \dots, f_{i,|\Phi_i|}\}$ — упорядоченное множество псевдобоулевых функций, существенно зависящих ровно от i переменных (переменные принимают значения в множестве $B = \{0, 1\}$, а функции принимают значения в конечном множестве A , $A \subset R$, $|A| > 1$), $i = 0, 1, \dots, m$.

Случайная система уравнений S относительно неизвестных $x_1, \dots, x_n$ состоит из M уравнений, которые выбираются последовательно, случайно и независимо друг от друга, вероятность появления уравнения вида

$$f_{i,j}(x_{s_1}, \dots, x_{s_i}) = a \quad (1)$$

равна $c_{i,j,a}$ для каждого набора (i, j, a) , где $i = 0, 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, |\Phi_i|$, a принадлежит области значений функции $f_{i,j}$, сумма $c_{i,j,a}$ по указанным наборам (i, j, a) равна 1. Выбор упорядоченного множества неизвестных $\{x_{s_1}, \dots, x_{s_i}\}$ для каждого уравнения с функцией из Φ_i осуществляется независимо, случайно и равновероятно по схеме без возвращения из всех $n(n-1) \cdots (n-i+1)$ возможных упорядоченных наборов неизвестных по i штук.

Вероятность совместности $\mathbf{P}_c(S)$ системы S равна сумме вероятностей ее совместных реализаций. Если существует такая функция $Q(n)$, что при $n \rightarrow \infty$: $\mathbf{P}_c(S) \rightarrow 1$, если $M(n) = o(Q(n))$, и $\mathbf{P}_c(S) \rightarrow 0$, если $Q(n) = o(M(n))$, то она называется *пороговой функцией совместности системы S* . Множество $V = \{s_1, \dots, s_t\}$, $V \subseteq \{1, \dots, i\}$, является несовместной t -фиксацией значением b переменных уравнения (1), где $1 \leq t \leq i$, $b \in B$, если подфункция функции $f_{i,j}$, получающаяся в результате фиксации значением b ее переменных с номерами из V , не принимает значение a (правую часть уравнения (1)). Пусть $k_{i,j,a}^{(b,t)}$ — число несовместных t -фиксаций значением b переменных уравнения (1), $t_{i,j,a}^{(b)}$ — число однозначно определяющихся из уравнения (1) переменных, равных b , $c^{(b,t)} = \sum_{(i,j,a), t \leq i \leq m} c_{i,j,a} k_{i,j,a}^{(b,t)}$, $c^{(b)} = \sum_{(i,j,a)} c_{i,j,a} t_{i,j,a}^{(b)}$, $b \in B$.

Алгоритм **A** отбраковки несовместных реализаций S имеет два шага.

1. Из уравнений с однозначно определяющимися переменными выявляются неизвестные системы уравнений, равные b .

2. Перебираются уравнения с несовместными $(r-1)$ -фиксациями значением b . Если найдется такое уравнение с фиксацией $\{s_1, \dots, s_t\}$, что в нем на местах $s_1, \dots, s_t$ стоят неизвестные, значения которых на первом шаге были определены (и равны b), то система уравнений несовместна; в противном случае не делается никакого вывода о ее совместности.

Обозначим π_n сумму вероятностей реализации системы S , несовместность которых определит алгоритм **A**.

Теорема. Система S имеет пороговую функцию совместности $n^{1-1/r}$ при $r \in \{3, \dots, m+1\}$ тогда и только тогда, когда для некоторого $b \in B$ справедливы условия $c^{(b)} > 0$, $c^{(b \oplus 1)} = 0$, $c^{(b,1)} + \dots + c^{(b,r-2)} = 0$, $c^{(b,r-1)} > 0$. В этих условиях при $M \sim cn^{1-1/r}$, $c > 0$, справедливы оценки $\mathbf{P}_c(S) \sim e^{-c^r c^{(b,r-1)} (c^{(b)})^{r-1}}$, $\pi_n \sim 1 - \mathbf{P}_c(S)$.

В условиях теоремы алгоритм имеет трудоемкость $O(n^{1-1/r})$ и предельную надежность, как у алгоритма полного перебора решений. Оценка $\mathbf{P}_c(S)$ конкретизирует результат теоремы 3.1 статьи [1] в псевдобоулевом случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шаповалов А. В.* Пороговые функции совместности случайных систем уравнений. — Труды по дискретной математике, 2006, т. 9, с. 377–400.