В. Г. Ш а р а п о в (Волгоград, ВолГУ)**. Теоретико-числовые эндоморфизмы и инвариантные меры.**

Пусть функция $f\colon\ [0,1] \to [0,n]$ строго возрастает от 0 до n. В [1], [2] рассматривались условия $x_1 < x \Rightarrow\ f(x_2) - f(x_1) > x_2 - x_1$ для всех $x_1, x_2 \in [0,1]$ и существование инвариантной меры, при которых устанавливались эргодичность в [1] и точность в [2] эндоморфизмов, порождающихся функцией f. При несколько других условиях эргодические свойства таких эндоморфизмов исследовались в [3].

Мы будем рассматривать теоретико-числовые эндоморфизмы при условии

$$f(x) > x \quad \text{для всех } x \in [0,1]. \tag{1}$$

Будет показан способ нахождения инвариантной меры. (Если существует такой $x \in [0,1]$, что $f(x) < x$, то инвариантная мера не существует.)

Известно уравнение Перрона–Фробениуса–Рюэля для плотности инвариантной меры: $\rho(x) = \sum_{f(y)=x} \rho(y)/|f'(y)|$, решить которое не просто.

Так как $f(x)$ возрастает, то почти всюду существует производная $f'(x)$. Пусть $f(x_k) = y$, $k = 1,\dots,n$, ξ — разбиение на прообразы $C_y = \{x_k\}$, $k = 1,\dots,n$, точек y с условными мерами $m_i(y) = (f'(x_i))^{-1}$. Плотность в точке y: $\rho(y) = \sum_{i=1}^{n} m_i(y)$. Очевидно, что $\int_0^1 \rho(y)\,dy = 1$. Чтобы плотность была 1 (чтобы мера была инвариантной), надо преобразовать $[0,1]$ так, чтобы каждый $y = f(x_k)$ переместился в точку $f(x_k)/\int_0^y \rho(y)\,dy$, и точно такое же преобразование по оси x.

Пусть $f(x)$ сохраняет меру, например,

$$f(x) = 2x, \quad \text{т. е.} \quad Tx = 2x \,(\mathrm{mod}\, 1). \tag{2}$$

Сжатием отрезка $[0,1/2]$ в два раза до $[0,1/4]$ и растяжением $[1/2,1]$ до $[1/4,1]$ получим отображение

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x < 1/8, \\ 1/4 + 6(x - 1/8), & 1/8 \leqslant x < 1/4, \\ 2/3(x - 1/4), & 1/4 \leqslant x < 5/8, \\ 1/4 + 2(x - 5/8), & 5/8 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

Тогда $\rho(y) = m_1(y) + m_2(y) = 2$, $0 \leqslant y < 1/4$, и $\rho(y) = m_1(y) + m_2(y) = 2/3$, $1/4 \leqslant y < 1$.

Если растянуть отрезок $[0,1/4]$ в два раза и сжать $[1/4,1]$ с коэффициентом $2/3$ как по оси x, так и по оси y, то получим (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Renyi A.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1957, v. 8, p. 477–493.
2. *Рослин В. А.* Изв. АН СССР, 1961, т. 25, № 4, с. 499–530.
3. *Шарапов В. Г.* Случайные процессы и статистические выводы, 1974, в. IV, с. 194–206.