

П. А. Б а к у т, Ю. П. Ш у м и л о в (Москва, ИПИР). **Рекуррентный алгоритм формирования апостериорных вероятностей обнаружения большого числа объектов.**

В статистической теории оптимального обнаружения установлено, что принимаемые сигналы нужно использовать для формирования апостериорной вероятности наличия цели, что определяет способ накопления принимаемых сигналов.

1. Фоноцелевую обстановку в поле наблюдения можно описать массивом чисел Λ , включающим число k ($k = 1, 2, \dots, K$; в рассматриваемом алгоритме, как правило, $k > 10$) объектов, их координаты $\vec{R}$, скорости $\vec{V}$ (все трехмерные) и яркости P . Таким образом, массив фоноцелевой обстановки имеет вид: $\Lambda = (k; \vec{R}_1, \vec{V}_1, P_1; \vec{R}_2, \vec{V}_2, P_2; \dots; \vec{R}_k, \vec{V}_k, P_k) = (k; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, где $\lambda = (\vec{R}; \vec{V}, P)$ — фазовая координата цели. При отсутствии объектов фоноцелевая обстановка принимает вид $\Lambda = 0$. Термин «фазовая координата» используется в том смысле, в каком он используется в механике или теоретической физике: фазовые координаты объекта — совокупность параметров, мгновенные значения которых определяют их дальнейшее поведение — «фазовую траекторию». В простейших случаях закон изменения фазовых координат имеет вид $\dot{\lambda} = F(\lambda)$.

С течением времени фоноцелевая обстановка изменяется за счет перемещения объектов и (или) изменения ракурса наблюдения, хотя в принципе возможны варианты с исчезновением объектов или появлением новых. Изменяющийся массив Λ образует случайный процесс $\Lambda(t)$. Процесс $\Lambda(t)$ естественно аппроксимировать марковским процессом 1-го порядка с переходной вероятностью $P_{\Delta t}(\Lambda|\Lambda')$, описывающей возможное изменение фазовых координат объектов за время Δt .

Информация о фоноцелевой обстановке Λ снимается с приемной матрицы в дискретные моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_m$ с интервалом Δt — периодом локации. При этом регистрируются кадры $X_1, X_2, \dots, X_m$, $m = 1, 2, \dots, M$. Каждый кадр X_m представляет собой $N \times N$ -массив чисел n_{pq} , $p, q = 1, \dots, N$, и является функцией текущего состояния фоноцелевой обстановки $X_m = F[\Lambda_m]$. Процесс формирования кадров сопровождается шумами и случайными искажениями, так что кадры X_m , вообще говоря, случайны. Поэтому более адекватным описанием связи X_m с Λ_m является задание условного распределения вероятностей $P(X_m|\Lambda_m)$. При фиксированном (принятом) кадре X_m распределение $P(X_m|\Lambda_m)$ как функция Λ_m определяет правдоподобие различных значений обстановки Λ_m . Обозначим $P(X|0) = P_0(X)$ — распределение вероятностей кадра X при полном отсутствии объектов в поле наблюдения, т. е. распределение вероятностей чисто шумового кадра.

Момент начала работы алгоритма обозначим t_1 . Предполагаем, что к этому моменту сформировано некоторое априорное распределение вероятностей фоноцелевой обстановки $W_1^{ap}(\Lambda) = W_1^{ap}(k; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ и принят и считан кадр X_1 . По этим данным на основе формулы обратной вероятности рассчитывается апостериорное распределение:

$$W_1^{ps}(\Lambda) = \frac{P(X_1|\Lambda)W_1^{ap}(\Lambda)}{\int P(X_1|\Lambda)W_1^{ap}(\Lambda) d\Lambda} = \frac{l(X_1|\Lambda)W_1^{ap}(\Lambda)}{\int l(X_1|\Lambda)W_1^{ap}(\Lambda) d\Lambda},$$

где $l(X|\Lambda) = P(X|\Lambda)/P_0(X)$. Через период локации Δt процесс повторяется. За время Δt происходит прием и считывание следующего кадра — X_2 , отражающего фоноцелевую обстановку Λ_2 . Апостериорное распределение $W_1^{ps}(\Lambda)$ за время Δt «расплывется» за счет априорного изменения обстановки и перейдет в $W_2^{ap}(\Lambda)$:

$$W_2^{ap}(\Lambda) = \int P_{\Delta t}(\Lambda|\Lambda')W_1^{ps}(\Lambda') d\Lambda'. \quad (1)$$

Распределение $W_2^{ap}(\Lambda)$ становится априорным для фоноцелевой обстановки Λ_2 , и т. д. Таким образом, мы приходим к следующему рекуррентному алгоритму формирова-

ния апостериорных вероятностей:

$$W_m^{ap} \rightarrow W_m^{ps} \rightarrow W_{m+1}^{ap} \rightarrow W_{m+1}^{ps}, \quad W_{m+1}^{ap} = \int P_{\Delta t}(\Lambda|\Lambda') W_m^{ps}(\Lambda') d\Lambda', \quad (2)$$

$$W_{m+1}^{ps}(\Lambda) = l(X_{m+1}|\Lambda) W_m^{ap}(\Lambda) / \int l(X_{m+1}|\Lambda) W_m^{ap}(\Lambda) d\Lambda. \quad (3)$$

Распределение $W_m^{ap}(\Lambda)$, сформированное к моменту t_m на основе $m-1$ принятых кадров $X_1, X_2, \dots, X_{m-1}$ и экстраполированное на время Δt вперед на основе априорного закона изменения Λ , становится априорным для $\Lambda(t_m)$. Распределение $W_m^{ps}(\Lambda)$, сформированное в момент t_m на основе m принятых кадров $X_1, X_2, \dots, X_{m-1}, X_m$, является апостериорным для $\Lambda(t_m)$.

2. Пуассоновская аппроксимация распределений вероятности фоновой обстановки. Далее предположим, что множество случайных величин $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ является пуассоновским, т. е.

$$W(k; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \prod_{i=1}^k w(\lambda_i) \exp \left\{ - \int_{\Omega} w(\lambda) d\lambda \right\}. \quad (4)$$

Функция $w(\lambda) = w(\vec{R}, \vec{V}, P)$ имеет смысл плотности среднего числа целей в фазовом пространстве $(\lambda = (\vec{R}, \vec{V}, P))$, т. е. $\int_{\Omega} w(\lambda) d\lambda = \int_{\Omega} w(\vec{R}, \vec{V}, P) d\vec{R} d\vec{V} dP$ есть среднее число целей в области Ω . Чтобы это предположение не было противоречивым, необходимо убедиться, что пуассоновский вид (4) сохраняется при всех преобразованиях (1)–(3) и изменяется только плотность среднего числа целей $w(\lambda)$.

Естественно предположить, что изображение цели с фазовыми параметрами $\lambda = (\vec{R}, \vec{V}, P)$ занимает часть кадра X_{λ} , определяемую диаграммой излучения объекта. Отсюда

$$P(X|k; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \prod_{k=1}^k \frac{P(X_{\lambda_k}|1, \lambda_k)}{P(X_{\lambda_k}|0)} \prod_{k=1}^k P(X_{\lambda_k}|0) = \prod_{k=1}^k l(\lambda_k) P_0(x), \quad (5)$$

где функция правдоподобия

$$l(\lambda_k) = P(X_{\lambda_k}|1, \lambda_k) / P(X_{\lambda_k}|0). \quad (6)$$

Формула (5) определяет правдоподобие различных вариантов $\Lambda = (k; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$. Естественно ожидать, что апостериорное распределение массива Λ также будет пуассоновским, т. е.

$$W^{ps}(k; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \prod_{k=1}^K w^{ps}(\lambda_k) \exp \left\{ - \int_{\Omega} w^{ps}(\lambda) d\lambda \right\}. \quad (7)$$

Это возможно при некоторых упрощающих предположениях относительно переходного распределения вероятностей $P_{\Delta t}(\Lambda|\Lambda')$. Главное, чтобы за время Δt цели не «перепутались», т. е. чтобы мы могли отождествить цели в моменты t и $t + \Delta t$. Полагая

$$W_m^{ps}(k; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \prod_{k=1}^K w_{m-1}^{ps}(\lambda_k) \exp \left\{ - \int_{\Omega} w_{m-1}^{ps}(\lambda) d\lambda \right\},$$

получаем

$$\begin{aligned} W_m^{ap}(k; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) &= \prod_{k=1}^K \int P_{\Delta t}(\lambda_k | \lambda') w_{m-1}^{ps}(\lambda') \exp \left\{ - \int_{\Omega} w_{m-1}^{ps}(\lambda) d\lambda \right\} \\ &= \prod_{k=1}^K \int w_m^{ap}(\xi_k) \exp \left\{ - \int_{\Omega} w_m^{ap}(\xi) d\xi \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$w_m^{ap}(\lambda) = \int P_{\Delta t}(\lambda | \lambda') w_{m-1}^{ps}(\lambda') d\lambda'. \quad (9)$$

Таким образом, пуассоновость множества целей после экстраполяции сохраняется, но плотность среднего числа целей «расплывается» согласно формуле (9).

3. Алгоритм. Возвращаемся к формулам (5)–(6). Получим

$$\begin{aligned} W^{ps}(k; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) &= \prod_{k=1}^K l(\lambda_k) P_0(x) \prod_{k=1}^K w^{ap}(\lambda_k) \exp \left\{ - \int_{\Omega} w^{ap}(\lambda) d\lambda \right\} \\ &\times \left[P_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int \prod_{k=1}^K l(\lambda_k) P_0(x) \prod_{k=1}^K w^{ap}(\lambda_k) \exp \left\{ - \int_{\Omega} w^{ap}(\lambda) d\lambda \right\} \right]^{-1} \\ &= \prod_{k=1}^K l(\lambda_k) w^{ap}(\lambda_k) / \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\int l(\lambda) w^{ap}(\lambda) d\lambda \right)^k \right] \\ &= \prod_{k=1}^K l(\lambda_k) w^{ap}(\lambda_k) \exp \left\{ - \int l(\lambda) w^{ap}(\lambda) d\lambda \right\} = \prod_{k=1}^K w^{ps}(\lambda_k) \exp \left\{ - \int w^{ps}(\lambda) d\lambda \right\}, \end{aligned}$$

где

$$w^{ps}(\lambda) = l(\lambda) w^{ap}(\lambda). \quad (10)$$

Таким образом, апостериорное распределение вероятностей наличия обнаруживаемого объекта в точке λ пространства координат–скоростей–яркостей $\vec{R}, \vec{V}, P$ осталось пуассоновским и определяется одной функцией $w(\lambda) = w(\vec{R}, \vec{V}, P)$ — плотностью среднего числа целей в пространстве λ .

Рекуррентный алгоритм определяется (10). Принятие решения о наличии объекта в точке λ происходит при превышении $w(\lambda)$ заданного порога обнаружения h .