

М. Ю. Захаров, Е. А. Семенчин (Краснодар, ОАО «НПО «Промавтоматика»; КубГУ). **О методе точечных потенциалов решения плоской краевой задачи для бигармонического уравнения.**

Предлагается развитие специального метода галеркинско-го типа решения краевой задачи для однородного бигармонического уравнения. Метод был изложен в работах [1], [2]. Указанная краевая задача имеет различные приложения в теории упругости и гидродинамике.

Пусть Q — ограниченная односвязная область, $Q \subset \mathbf{R}^2$, с границей $\partial Q \in C^2$, внешняя область $Q^+ = \mathbf{R}^2 \setminus \overline{Q}$, $x = (x_1, x_2)$, $\partial/\partial n_y$ (или $\partial/\partial n$) означает дифференцирование по направлению внешней нормали к ∂Q в точке $y \in \partial Q$ (здесь и далее сохранены все обозначения из [1]–[3]).

Ограниченное множество точек x^k ($k = 1, 2, \dots$), принадлежащих области $Q \subset \mathbf{R}^2$ (или Q^+) и отделенных от границы ∂Q этой области, назовем последовательностью единственности для гармонических функций в Q (Q^+), если для любых гармонических в Q (Q^+) функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из равенства $f_1(x^k) = f_2(x^k)$, $k = 1, 2, \dots$, следует тождество $f_1(x) \equiv f_2(x)$ в области Q (Q^+).

Потребуем дополнительно, чтобы потенциал Робена $R(x)$, определяемый областью Q , не равнялся нулю в Q :

$$R(x) = \int_{\partial Q} \varphi^*(y) \ln |x - y|^{-1} ds_y \equiv \text{const} \neq 0, \quad x \in Q.$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta^2 U(x) = 0, \quad x \in Q, \quad \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{\partial Q} = f(x), \quad U \Big|_{\partial Q} = g(x). \quad (1)$$

Ее решение, принадлежащее $C^4(Q) \cap C^2(\overline{Q})$ ($f(x) \in C^1(\partial Q)$, $g(x) \in C^2(\partial Q)$), будем искать в виде [3]:

$$\begin{aligned} AU(x) = & - \int_Q \Delta U(y) \ln |x - y|^{-1} dy \\ & - \int_{\partial Q} \left[g(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln |x - y|^{-1} - f(y) \ln |x - y|^{-1} \right] ds_y, \end{aligned} \quad (2)$$

где $A = 2\pi$, $x \in Q$; $\pi, x \in \partial Q$; $0, x \in Q^+$; $\Delta U(y)$ — плотность логарифмического потенциала площади, подлежащая определению.

Искомую плотность $\Delta U(y)$ в (2) представим в виде

$$\Delta U(y) = (\Delta U(y))^{(0)} + \tilde{C}, \quad (3)$$

где $(\Delta U(y))^{(0)}$ ортогональна единице в $L_2(Q)$, константа $\tilde{C} = \int_{\partial Q} f(y) ds_y / |Q|$.

Для построения $(\Delta U(y))^{(0)}$ рассмотрим обратную задачу: воспользовавшись (2), (3), найти $(\Delta U(y))^{(0)}$ из интегрального уравнения

$$\begin{aligned} - \int_Q (\Delta U(y))^{(0)} \ln |x^m - y|^{-1} dy = W^{(0)}(x^m) = \int_{\partial Q} \left[g(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln |x^m - y|^{-1} \right. \\ \left. - f(y) \ln |x^m - y|^{-1} \right] ds_y + \tilde{C} \int_Q \ln |x^m - y|^{-1} dy, \end{aligned} \quad (4)$$

в котором $W^{(0)}(x^m)$, $m = 1, 2, \dots$, заданы с помощью правой части (4); $x^m \in Q^+$ ($m = 1, 2, \dots$) — последовательность единственности для гармонических функций в Q^+ ; $\tilde{C}$ определена в (3).

Приближенное решение $(\Delta U(y))_N^{(0)}$ задачи (4) ищем в виде

$$(\Delta U(y))_N^{(0)} = \sum_{i=1}^N c_i \gamma_i(y), \quad (5)$$

где $\gamma_n(y) = \ln |x^n - y|^{-1} - J_n$, $J_n = \int_Q \ln |x^n - y|^{-1} dy / |Q|$, $y \in Q$, x^n — из (4), $n = 1, \dots, N$.

Доказаны существование и единственность точного и приближенного решения задачи (4), сходимость в $L_2(Q)$ при $N \rightarrow \infty$ приближенного решения к точному и найден способ определения коэффициентов c_k в (5), заключающийся в построении СЛАУ относительно c_k с близким к нулю определителем и ее решении методом регуляризации.

Приближение искомой плотности $\Delta U(y)$, согласно (3), имеет вид

$$(\Delta U(y))_N = (\Delta U(y))_N^{(0)} + \frac{1}{|Q|} \int_{\partial Q} f(y) ds_y.$$

Подставим $(\Delta U(y))_N$ в (2) и перейдем в область $\bar{Q}$, получим приближенное решение $U_N(x)$ задачи (1).

Доказана равномерная сходимость $U_N(x)$ в $\bar{Q}$ к точному решению $U(x)$ задачи (1) при $N \rightarrow \infty$.

Результаты численного решения задачи (1), полученного вышеописанным методом, имеют высокую точность, в том числе для областей со сложной формой границы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лежнев В. Г.* Метод точечных потенциалов для бигармонического уравнения. — В сб.: Труды 6-й Международной конференции: Современные проблемы механики сплошной среды. Ростов-на-Дону, 2000, т. 2, с. 97–100.
2. *Лежнев В. Г., Данилов Е. А.* Задачи плоской гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2000, 92 с.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1987.