

В. С. К р о т к и н, О. В. К у з ь м и н (Иркутск, ИГУ). **Рекуррентное соотношение для вычисления мощностей классов Райзера.**

Следуя [1], под комбинаторной конфигурацией понимаем любую систему подмножеств конечного множества. Пусть на множестве $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ задана конфигурация $\mathfrak{R}$, состоящая из подмножеств $X_1, \dots, X_n$. Элемент a_j и подмножество X_i инцидентны, если $a_j \in X_i$. Для конфигурации $\mathfrak{R}$ определим такую матрицу, состоящую из нулей и единиц, $A = [\alpha_{ij}]$, размера $m \times n$, что

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & a_j \in X_i, \\ 0, & a_j \notin X_i. \end{cases}$$

Матрица $A = [\alpha_{ij}]$ называется *матрицей инцидентности* конфигурации $\mathfrak{R}$ на множестве $X = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Обычно важные и интересные в теоретическом или прикладном отношении конфигурации подчиняются ограничениям на величины подмножеств и числа появлений элементов в этих подмножествах.

Рассмотрим n -множество $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ и на нем семейства $\mathfrak{R} = \{X_1, \dots, X_m\}$, состоящие из m подмножеств X , в которых:

- 1) число элементов удовлетворяет условию $|X_i| = r_i$ ($i = 1, \dots, m$);
- 2) элемент $a_j \in X$ встречается в подмножествах из $\mathfrak{R}$ в точности s_j раз, где $r_1, r_2, \dots, r_m, s_1, s_2, \dots, s_n$ — заданные целые неотрицательные числа.

Рассмотрим вопрос о существовании конфигураций $\mathfrak{R}$ с данными свойствами. Для матрицы $A = [\alpha_{ij}]$ размера $m \times n$ *вектором строчных сумм* называется вектор $R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$, где r_i — сумма элементов в i -й строке $A = [\alpha_{ij}]$ ($i = 1, \dots, m$), и *вектором столбцевых сумм* называется вектор $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, где s_j — сумма элементов в j -м столбце $A = [\alpha_{ij}]$ ($j = 1, \dots, n$).

Для заданных целочисленных векторов $R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ и $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ матрица инцидентности $A = [\alpha_{ij}]$ конфигурации $\mathfrak{R}$, удовлетворяющей условиям 1 и 2, есть (0,1)-матрица с вектором строчных сумм $R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ и вектором столбцевых сумм $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$. Обратно, любая (0,1)-матрица $A = [\alpha_{ij}]$ размера $m \times n$ с вектором строчных сумм $R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ и вектором столбцевых сумм $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ приводит к конфигурации подмножеств $\mathfrak{R}$ с условиями 1 и 2.

Классом Райзера $U_{n,m}(R, S)$ называется совокупность (0,1)-матриц размера $m \times n$ с заданными векторами $R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ и $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ в качестве векторов строчных и столбцевых сумм соответственно.

С классами данных матриц связано два фундаментальных вопроса: 1) Когда класс $U_{n,m}(R, S)$ не пуст? 2) Чему равно точное число матриц в классе $U_{n,m}(R, S)$?

Ответом на первый вопрос служат критерии непустоты класса $U_{n,m}(R, S)$, например, теорема Гейла–Райзера [1], [2]. Более сложным оказывается второй вопрос о вычислении мощности класса $U_{n,m}(R, S)$, так называемая *проблема Райзера*.

В работе рассмотрен частный случай, когда $R = S = (k, k, \dots, k)$, $k \in \mathbb{Z}$, $m = n$, и получено следующее утверждение.

Теорема. *Количество всевозможных квадратных (0,1)-матриц порядка n , в каждой строке и каждом столбце которых ровно k единиц и $n - k$ нулей, определяется соотношением $|U_n(k, k)| = A_n(0, 0, \dots, 0)$, где*

$$A_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \sum_{i_1 + \dots + i_k = k} \binom{n - n_1}{i_1} \binom{n_1 - n_2}{i_2} \dots \binom{n_{k-1} - n_k}{i_k} \\ \times A_n(n_1 + i_1, n_2 + i_2, \dots, n_k + i_k),$$

суммирование ведется по всем композициям натурального k на k целых неотрицательных слагаемых, а $A_n(n, n, \dots, n) = 1$.

Для доказательства данного рекуррентного соотношения был применен один из наиболее общих комбинаторных методов — конструктивный подход, заключающийся в построении объектов с заданными характеристиками и подсчете их количества.

Пр и м е р. Найдем $|U_3(2, 2)| = A_3(0, 0)$.

$$A_3(0, 0) = \sum_{i_1+i_2=2} \binom{3}{i_1} \binom{0}{i_2} A_3(0+i_1, 0+i_2) = \binom{3}{2} \binom{0}{0} A_3(2, 0),$$

$$A_3(2, 0) = \sum_{i_1+i_2=2} \binom{3-2}{i_1} \binom{2}{i_2} A_3(2+i_1, 0+i_2) = \binom{1}{0} \binom{2}{2} A_3(2, 2) + \binom{1}{1} \binom{2}{1} A_3(3, 1),$$

$$A_3(2, 2) = \sum_{i_1+i_2=2} \binom{1}{i_1} \binom{0}{i_2} A_3(2+i_1, 2+i_2) = 0,$$

$$A_3(3, 1) = \sum_{i_1+i_2=2} \binom{0}{i_1} \binom{2}{i_2} A_3(3+i_1, 1+i_2) = \binom{0}{0} \binom{2}{2} A_3(3, 3) = 1.$$

Получаем: $|U_3(2, 2)| = A_3(0, 0) = 6$.

Таким образом можно вычислить мощности классов Райзера $U_n(k, k)$ и записать результаты в виде таблицы:

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	2	1				
3	3!	3!	1			
4	4!	90	4!	1	1	
5	5!	2040	2040	5!	1	
6	6!	67950	297200	67950	6!	1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сачков В. Н., Тараканов В. Е. Комбинаторика неотрицательных матриц. М.: ТВП, 2000.
2. Тараканов В. Е. Комбинаторные задачи и (0,1)-матрицы. М.: Наука, 1985.