

К. С. В а р т а н о в (Москва, ООО «КВ Ойл»). Математическое моделирование установившегося осесимметричного течения с закруткой в вихревой трубе.

Общее векторное уравнение движения жидкости со скоростью $\bar{u}$ и завихренностью $\bar{w}$ имеет вид [1]:

$$\bar{u} \times \bar{w} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \nabla \bar{B}. \quad (1)$$

Рассмотрим осесимметричное течение в цилиндрических координатах (r, h, φ) с соответствующими компонентами скорости (u, v, w) и заданными компонентами завихренности (w_r, w_h, w_φ) :

$$w_r = \frac{1}{h} \frac{\partial(hw)}{\partial h}, \quad w_h = -\frac{\partial w}{\partial r}, \quad w_\varphi = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial h}.$$

Уравнение сохранения массы будет выполнено, если компоненты скорости u и v будут выражены через функцию тока $\psi(r, \varphi)$ следующим образом:

$$u = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial h}, \quad v = -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Отсюда азимутальная компонента завихренности будет равна

$$w_\varphi = -\frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2} - \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial h} \right). \quad (2)$$

Из (1) получаем три скалярных уравнения,

$$\begin{aligned} uw_z - vw_\varphi - \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial B}{\partial h}, & vw_\varphi - w_h - \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial B}{\partial r}, \\ uw_h - vw_z - \frac{\partial w}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (3) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d(hw)}{dt} = 0. \quad (4)$$

В таком виде (4) выражает постоянство циркуляции по жидкому контуру в форме окружности, имеющей центр на оси симметрии и лежащей в плоскости, нормальной к ней.

Для установившегося течения каждая частица жидкости движется вдоль линии тока по поверхности, образованной вращением кривой $\psi = \text{const}$, лежащей в осевой плоскости, относительно оси симметрии течения. В таком случае из (4) и теоремы Бернулли имеем

$$\frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{P}{\rho} = B(\psi), \quad hw = A(\psi).$$

Из (2) получаем уравнение относительно функции тока

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2} - \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial h} = h^2 \frac{dB}{d\psi} - A \frac{dA}{d\psi}. \quad (5)$$

Уравнение (5), применимое во всем поле течения, путем несложных преобразований приводится в цилиндрической области к уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 \Phi}{dh^2} + \frac{1}{h} \frac{d\Phi}{dh} + \left(k^2 - \frac{1}{h^2} \right) \Phi = 0,$$

имеющее общее решение $\Phi = cJ_1(kh) + dY_1(kh)$, где J_1 и Y_1 — функции Бесселя 1-го и 2-го рода; Φ определяется из выражения

$$\psi(z, h) = \frac{1}{2}uh^2 + h\Phi(r, h), \quad k = 2\frac{w_1}{u_1}.$$

Окончательно для осевой скорости в цилиндрической области имеем

$$\bar{u} = u_1 = \frac{1}{h} \frac{d}{dh} [chJ_1(kh) + dhY_1(kh)],$$

для азимутальной скорости

$$\bar{w} = w_1h + kcJ_1(kh) + kBY_1(kh),$$

где u_1 и w_1 — постоянная осевая скорость и угловая скорость вращения жидкости как целого.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прандтль Л.* Гидромеханика. М.-И.: РХД, 2000, 410 с.