

Г. И. Б е л я в с к и й, В. В. М и с ю р а (Ростов-на-Дону, РГСУ). **Вычисление хеджа в случае одного неполного рынка.**

На вероятностном пространстве (Ω, F_n, P) рассмотрим (B, S) -рынок, где B_n, S_n — адаптированные последовательности случайных величин, выражающие соответственно стоимости безрискового и рискованного активов, причем $S_0 > 0$ и $B_n > 0$ для любого $n = 0, 1, \dots, N$; $F_n \in \sigma(h_1, h_2, \dots, h_n)$, где $h_n = \ln(\tilde{S}_n/\tilde{S}_{n-1})$ и $\tilde{S}_n = S_n/B_n$ — дисконтированная стоимость акции. Поведение цены акции опишем с помощью модели стохастической волатильности

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad \text{где} \quad \sigma_n = e^{\Delta_n/2}, \quad \Delta_n = a_0 + a_1 \Delta_{n-1} + c \delta_n. \quad (1)$$

Модель включает в себя два источника случайности: $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ и $\delta = (\delta_n)$, которые являются независимыми и стандартными гауссовскими последовательностями.

В [4] показано, что описанный выше рынок, который является неполным и безарбитражным, можно аппроксимировать рынком Кокса–Росса–Рубинштейна с динамически изменяющимися параметрами.

Возрастающая последовательность σ -алгебр $\Phi_n \subset F_n$ имеет следующую структуру:

$$\Phi_0 = \{\Omega, \emptyset\}, \quad \Phi_n = \sigma\{B_0^{(n)}, B_1^{(n)}, \dots, B_{2^n-1}^{(n)}\}, \quad B_i^{(n-1)} = B_{2i}^{(n)} \cup B_{2i+1}^{(n)},$$

$$B_i^{(n)} \cap B_j^{(n)} = \emptyset \quad (i \neq j), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

В модели Кокса–Росса–Рубинштейна с динамически изменяющимися параметрами для произвольного момента времени n приращение дисконтированной стоимости вычисляется по формулам:

$$\Delta \tilde{S}_n(B_{2i+1}^n) = a_n \tilde{S}_{n-1}(B_i^{n-1}), \quad \Delta \tilde{S}_n(B_{2i}^n) = b_n \tilde{S}_{n-1}(B_i^{n-1}), \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

где $a_n, b_n \in \Phi_{n-1}$, $-1 < a_n < 0 < b_n$, $a_n = e^{-\xi_n} - 1$, $b_n = e^{\xi_n} - 1$, ξ_n — оценка $|h_n|$, h_n описывается моделью (1).

Сведем задачу хеджирования на рынке (1) к задаче хеджирования на (B, S) -рынке Кокса–Росса–Рубинштейна с динамически изменяющимися параметрами.

Обозначим D_N^k биномиальное дерево Кокса–Росса–Рубинштейна с вычисленной в каждом узле ценой акции и моделирующее процесс ценообразования, начиная от шага k до шага N .

Для вычисления хеджирующей стратегии можно применить следующий алгоритм.

1. Инициализация. Прогнозирование всего биномиального дерева D_N^1 : по имеющимся наблюдениям дисконтированной цены акции на момент времени $n = 0$, $\tilde{S}_{-m}, \tilde{S}_{-m+1}, \dots, \tilde{S}_{-1}$, находим оценку параметров модели (1) (см. [2]), вычисляем $|h_1|, |h_2|, \dots, |h_n|$ (см. [3]), вычисляем по формулам (2) цену акции на каждом узле биномиального дерева.

Вычисляем γ_1 и верхнюю цену хеджирования C_0^* .

2. Итерация. Прогнозирование поддеревья D_N^n (с уточнением параметров модели (1)). Вычисление γ_n . Если $n \leq N$, то переходим к шагу 2.

3. Остановка.

В докладе приведены результаты эксперимента на модельных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Теория. М.: Фазис, 1998.
2. *Белявский Г. И., Мисюра В. В.* Вычисление оценок параметров модели стохастической волатильности эволюции рискованных активов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 4, с. 757–758.
3. *Белявский Г. И., Мисюра В. В.* Прогнозирование поведения рискованных активов с помощью модели стохастической волатильности. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2005, т. 12, в. 3, с. 702.
4. *Белявский Г. И., Мисюра В. В.* Аппроксимация одного неполного (B, S) -рынка КРР (B, S) -рынком с динамически изменяющимися параметрами. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 6, с. 1091–1092.