А. М. К о л о д и й (Волгоград, ВолГУ). **О существовании сильных и слабых решений стохастических уравнений Вольтерра.**

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_s)_{s \geqslant 0}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией, удовлетворяющее «обычным» условиям; $\mathbf{C}$ — пространство непрерывных функций $x(\cdot)$: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $\|x\|_t = \sup_{s \leqslant t} |x(s)|$; $\mathcal{C}_t$ — σ-алгебра цилиндрических подмножеств $\mathbf{C}$ с координатами из $[0,t]$.

В работе, представленной данным сообщением, рассматривается стохастическое интегральное уравнение

$$\xi(t) = \eta(t) + \int_0^t a(t,s,\xi)\alpha(t,ds) + \int_0^t b(t,s,\xi)\mu(t,ds), \qquad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где η — $\mathbf{F}$-согласованный непрерывный процесс; $\alpha(t,s,\omega), \mu(t,s,\omega) \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+ \times [0,u]) \otimes \mathcal{F}_u | \mathcal{B}(\mathbf{R})$ и $a(t,s,x,\omega), b(t,s,x,\omega) \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+ \times [0,u]) \otimes \mathcal{C}_u \otimes \mathcal{F}_u | \mathcal{B}(\mathbf{R})$ для каждого $u \geqslant 0$; $(\mu(t,s))_{s \geqslant 0}$ — локальный непрерывный $\mathbf{F}$-мартингал с характеристикой $(\overline{\mu}(t,s))_{s \geqslant 0}$, $(\alpha(t,s))_{s \geqslant 0}$ — непрерывный процесс с локально ограниченной вариацией $(\overline{\alpha}(t,s))_{s \geqslant 0}$ для каждого $t \geqslant 0$. Пусть $\widetilde{\mu}(t,t',\cdot)$ обозначает характеристику мартингала $\mu(t,\cdot) - \mu(t',\cdot)$, $\widetilde{\alpha}(t,t',\cdot)$ — вариацию процесса $\alpha(t,\cdot) - \alpha(t',\cdot)$.

Предположим, что задана неубывающая функция $(\rho(t))_{t \geqslant 0}$ с $\lim_{t \to 0} \rho(t) = \rho(0) = 0$ и такая пара (φ, ψ) неубывающих функций $(\varphi(t))_{t \geqslant 0}$ и $(\psi(u))_{0 < u \leqslant 1}$, что $0 < \psi(u) \leqslant 1$ и $\int_0^1 \varphi(u)(\psi(u))^{-1} u^{-1-\psi(u)}\, du < \infty$.

Теорема 1. *Предположим, что существуют такие положительные* $\mathbf{F}$-*прогрессивно измеримые процессы* $(g_k(s))_{s \geqslant 0}$, $(G_k(s))_{s \geqslant 0}$, $(G_{k,n}(s))_{s \geqslant 0}$ *и непрерывные* $\mathbf{F}$-*согласованные возрастающие процессы* $(\lambda_k(s))_{s \geqslant 0}$, *что*:

a) *если* $t \leqslant k$, *то* $\int_0^t [G_k(s) + G_k^2(s) + G_{k,n}(s) + G_{k,n}^2(s)] g_k(s)\, d\lambda_k(s) < \infty$;

b) *если* $t \vee t' \vee s \leqslant k$, *то*

$$\begin{gathered}
|a(t,s,x)| + |b(t,s,x)| \leqslant G_k(s)(1 + \|x\|_s), \\
|b(t,s,x) - b(t',s,x)| \leqslant G_k(s)\varphi(|t-t'|)(1 + \|x\|_s), \\
|a(t,s,x) - a(t',s,x)| \leqslant G_k(s)\rho(|t-t'|)(1 + \|x\|_s), \\
\frac{d\overline{\mu}(t,\cdot)}{d\lambda_k(\cdot)}(s) \leqslant g_k(s), \qquad \frac{d\widetilde{\mu}(t,t',\cdot)}{d\lambda_k(\cdot)}(s) \leqslant g_k(s)\varphi^2(|t-t'|), \\
\frac{d\overline{\alpha}(t,\cdot)}{d\lambda_k(\cdot)}(s) \leqslant g_k(s), \qquad \frac{d\widetilde{\alpha}(t,t',\cdot)}{d\lambda_k(\cdot)}(s) \leqslant g_k(s)\rho(|t-t'|);
\end{gathered}$$

c) *если* $\|x\|_s \vee \|x'\|_s \leqslant n$, $t \vee t' \vee s \leqslant k$, *то*

$$\begin{gathered}
|a(t,s,x) - a(t,s,x')| + |b(t,s,x) - b(t,s,x')| \leqslant G_{k,n}(s)\|x - x'\|_s, \\
|b(t,s,x) - b(t,s,x') - b(t',s,x) + b(t',s,x')| \leqslant G_{k,n}(s)\varphi(|t-t'|)\|x - x'\|_s.
\end{gathered}$$

Тогда уравнение (1) *имеет единственное сильное решение.*

Теорема 2. *Предположим, что коэффициенты* $a(t,s,x)$ *и* $b(t,s,x)$ *уравнения* (1) *неслучайны, непрерывны по* x *и удовлетворяют условиям* a) *и* b) *теоремы* 1 *с неслучайными функциями* g_k, G_k, $G_{k,n}$. *Тогда существует слабое решение уравнения* (1).

Доказательства данных теорем основаны на применении неравенств для моментов равномерных норм и модулей непрерывности стохастических интегралов вида $\int_0^t \beta(t,s)\mu(t,ds)$, получаемых с применением результатов работы [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kolodii A. M.* On existence of continuous modifications of random processes. — Theory Stoch. Proc., 2000, v. 6 (22), № 1–2, p. 54–57.