В. И. Хохлов (Москва, МИ РАН). **Многочлены Эрмита и многочлены Пуассона–Шарлье как классические пределы многочленов Кравчука.**

Работа, по результатам которой представлен данный доклад, естественным образом связывает три классические системы многочленов, ортогональных относительно биномиального, пуассоновского и гауссовского распределений ровно так, как сами эти изначальные распределения теории вероятностей связывают классические предельные теоремы Пуассона и Муавра–Лапласа.

Систему многочленов, ортогональных относительно биномиального распределения с параметрами n и p, образуют многочлены $\{K_\alpha^{(n,\,p)}(x)\}_{\alpha=0,1,\dots,n}$ Кравчука [1]; систему многочленов, ортогональных относительно пуассоновского распределения с параметром λ, — многочлены $\{PC_\alpha^\lambda(x)\}_{\alpha=0,1,\dots}$ Пуассона–Шарлье (см., например, [2, §2.81]); систему многочленов, ортогональных относительно (стандартного) гауссовского распределения, — многочлены $\{H_\alpha(x)\}_{\alpha=0,1,\dots}$ Эрмита (см., например, [3, с. 151]).

В [4] предложено как несколько отличных от первоначального [1] представлений многочленов Кравчука, так и представление многочленов Пуассона–Шарлье в виде так называемых (нормированных) факториально-степенных биномов. Такого рода представления удобны для применения своеобразной техники комбинаторных преобразований, составляющих, наряду с некоторой совокупностью условностей и обоснованных правил, то, что автором названо *факториально-степенным формализмом* [4]. В качестве удачных отметим примеры применения этой техники в дискретной математике (для анализа свойств автоматов [5]) и в теории вероятностей (моментные неравенства в работах [6–9]).

Здесь эти представления и техника использованы для нового и прямого доказательства того факта, совершенно справедливо подчеркнутого М. Ф. Кравчуком названием его доклада [1], что открытые им многочлены суть допредельные формы многочленов Эрмита (последние будут получены ниже в форме, ранее не встречавшейся автору, но, разумеется, сводимой к известной). В качестве не менее естественного дополнения будет доказано, что многочлены Кравчука доставляют также допредельные формы многочленов Пуассона–Шарлье для перехода к пределу по базе, соответствующей предельной теореме Пуассона для биномиального распределения.

Принятая ниже система обозначений, пока оправдывающая внедрение факториально-степенного формализма в практический оборот, для сокращения изложения не приводится; она дословно заимствована из [4]. Отметим лишь, что запись $[a]^\alpha$, $a\in\mathbf{R}^1, \alpha=0,1,2,\dots$ всюду означает убывающую факториальную степень α числа a: $[a]^\alpha=a(a-1)\cdots(a-\alpha+1)$; при $\alpha\in\mathbf{R}^1\backslash\{0,1,2,\dots\}$ полагаем $[a]^\alpha=\sum_{\nu=0}^\infty([\alpha]^\nu/\nu!)([a]-1)^\nu$.

Нам понадобятся два вспомогательных комбинаторных тождества для факториально-степенных биномов, одно из которых сформулируем в виде леммы 1, а второе — в виде следствия леммы 2.

Лемма 1. *Для любых вещественных a,b и x справедливо тождество*

$$\Bigl(a\,[x]+b\,[-x]\Bigr)^\alpha=\Bigl(-b\,[\alpha-1]+(a-b)\,[x]\Bigr)^\alpha. \tag{1}$$

Лемма 2. *Для любых вещественных a,b и x справедливо тождество*

$$\Bigl(a\,[x]+b\,[x]\Bigr)^\alpha=\sum_{\nu=0}^{\alpha}\frac{[\alpha]^{2\nu}}{\nu!}[x]^{\alpha-\nu}a^\nu b^\nu(a+b)^{\alpha-2\nu}.$$

Следствие. *Справедливо тождество*

$$\Bigl([x]-[x]\Bigr)^\alpha=(-1)^{\alpha/2}[\alpha]^{\alpha/2}[x]^{\alpha/2}\frac{1+(-1)^\alpha}{2}. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в а лемм и следствия сводятся к записи факториально-степенных биномов в виде сумм, элементарным преобразованиям, изменениям порядка суммирования и заключительным выделениям обычных степенных биномов Ньютона (см., например, доказательство формулы (3) из [7, с. 593], практически полностью совпадающее с доказательством леммы 1 для частного случая $a + b = 1$).

Утверждение 1. *Если $n \to \infty$, то при любых вещественных z*

$$K_\alpha^{(n,1/2)}\Big(\frac{n + z\sqrt{n}}{2}\Big) \to \frac{(-1)^\alpha}{\sqrt{\alpha!}} H_\alpha(z), \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем многочлен Кравчука степени α в виде нормированного факториально-степенного бинома (ср. [4, замечание 3 на с. 590]):

$$K_\alpha^{(n,\,p)}(x) = \frac{(-1)^\alpha}{\sqrt{\alpha![n]^\alpha p^\alpha q^\alpha}} \widetilde{K}_\alpha^{(n,\,p)}(x) = \frac{(-1)^\alpha}{\sqrt{\alpha![n]^\alpha p^\alpha q^\alpha}} \Big(q\,[x] - p\,[n-x]\Big)^\alpha. \tag{3}$$

При $p = 1/2$, согласно лемме 2 из [4, с. 587], лемме 1 и следствию леммы 2, имеем:

$$\begin{aligned}\widetilde{K}_\alpha^{(n,\,1/2)}\Big(\frac{n + z\sqrt{n}}{2}\Big) &= \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} \frac{1}{2^\nu} \Big(\Big[\frac{n}{2}\Big] - \Big[\frac{n}{2}\Big]\Big)^\nu \frac{1}{2^{\alpha-\nu}} \Big(\Big[\frac{z\sqrt{n}}{2}\Big] - \Big[-\frac{z\sqrt{n}}{2}\Big]\Big)^{\alpha-\nu} \\ &= \frac{1}{2^\alpha} \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} (-1)^{\nu/2} [\nu]^{\nu/2} \Big[\frac{n}{2}\Big]^{\nu/2} \frac{1 + (-1)^\nu}{2} \Big([\alpha-\nu-1] + 2\Big[\frac{z\sqrt{n}}{2}\Big]\Big)^{\alpha-\nu},\end{aligned}$$

и, значит, при $n \to \infty$

$$\begin{aligned}K_\alpha^{(n,\,1/2)}\Big(\frac{n + z\sqrt{n}}{2}\Big) &= \frac{(-1)^\alpha 2^\alpha}{\sqrt{\alpha![n]^\alpha}} \widetilde{K}_\alpha^{(n,1/2)}\Big(\frac{n + z\sqrt{n}}{2}\Big) \\ &= \frac{(-1)^\alpha}{\sqrt{\alpha!}} \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} (-1)^{\nu/2} [\nu]^{\nu/2} \frac{1+(-1)^\nu}{2} \frac{[n/2]^{\nu/2}}{\sqrt{[n]^\nu}} \frac{([\alpha-\nu-1] + 2[z\sqrt{n}/2])^{\alpha-\nu}}{\sqrt{[n-\nu]^{\alpha-\nu}}} \\ &\to \frac{(-1)^\alpha}{\sqrt{\alpha!}} \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\nu}{[\nu/2]^{\nu/2}} \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{\nu/2} \frac{1+(-1)^\nu}{2} z^{\alpha-\nu} = \frac{(-1)^\alpha}{\sqrt{\alpha!}} H_\alpha(z).\end{aligned}$$

Утверждение 2. *Если $n \to \infty$ и $p \to 0$ так, что $n\,p \to \lambda$, то при любых вещественных x*

$$K_\alpha^{(n,\,p)}(x) \to (-1)^\alpha PC_\alpha^\lambda(x), \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исходя из (3), воспользуемся леммой 2 из [4, с. 587] и запишем факториально-степенной бином в (3) по его определению в виде суммы

$$\sum_{\nu,\,\mu} \frac{[\alpha]^{\nu+\mu}}{\nu!\,\mu!} q^\nu [x]^\nu (-1)^\mu p^\mu [n]^\mu (-1)^{\alpha-\nu-\mu} p^{\alpha-\nu-\mu} [-x]^{\alpha-\nu-\mu}.$$

Убеждаемся, что в условиях теоремы эта сумма стремится к сумме (факториально-степенному биному)

$$\sum_{\nu} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} [x]^\nu (-1)^{\alpha-\nu} \lambda^{\alpha-\nu} = \Big([x] - \lambda\Big)^\alpha,$$

так как $q^\nu = 1 - (\lambda\nu/n)(1 + o(1)) \to 1$ при любом $\nu = 0, 1, \dots, \alpha$, $p^\mu [n]^\mu = (p\,n)^\mu (1 + O(n^{-1})) \to \lambda^\mu$ при любом $\mu = 1, 2, \dots, \alpha$, а $p^{\alpha-\nu-\mu}[-x]^{\alpha-\nu-\mu} \to 0$ при $\nu + \mu \neq \alpha$. Учитывая, что нормирующий сомножитель в представлении (3) в условиях теоремы стремится к $(-1)^\alpha/\sqrt{\alpha!\lambda^\alpha}$, в качестве предела получаем многочлен $PC_\alpha^\lambda(x)$ системы многочленов Пуассона–Шарлье, записанный (с точностью до сомножителя $(-1)^\alpha$, не влияющего на свойство ортогональности) в форме нормированного факториально-степенного бинома (ср. [4, замечание 2 на с. 590]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Krawtchouk M.* Sur une généralisation des polynomes d'Hermite. — C. r. hebd. séances l'Acad. Sci., 1929, t. 189, № 17, p. 620–622.
2. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962, 500 с.
3. *Крамер Г.* Математические методы статистики. 2-е изд. М.: Мир, 1975, 648 с.
4. *Хохлов В. И.* Многочлены, ортогональные относительно полиномиального распределения, и факториально-степенной формализм. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 3, с. 585–592.
5. *Хохлов В. И.* Точные формулы для вторых моментов условных преобладаний по Севастьянову. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2003, т. 10, в. 3, с. 579–582.
6. *Висков О. В.*, *Прохоров Ю. В.*, *Хохлов В. И.* Пуассоновский аналог неравенства Чернова. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2001, т. 8, в. 1, с. 128–129.
7. *Прохоров Ю. В.*, *Висков О. В.*, *Хохлов В. И.* Биномиальные аналоги неравенства Чернова. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 3, с. 592–594.
8. *Прохоров Ю. В.*, *Висков О. В.*, *Хохлов В. И.* Аналоги неравенства Чернова для отрицательного биномиального распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 2, с. 379–382.
9. *Прохоров Ю. В.*, *Висков О. В.*, *Хохлов В. И.* Аналоги неравенства Чернова для гамма-распределения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 6, с. 1080–1081.