В. И. Аркин, А. Д. Сластников (Москва, ЦЭМИ РАН). **Оптимальная остановка, задача Стефана и реальные опционы.**

Пусть имеется инвестиционный проект создания нового предприятия в реальном секторе экономики, характеризующийся парой $(V_t, t \geqslant 0, I)$, где V_t — ожидаемая приведенная прибыль предприятия, созданного в момент t, а I — инвестиции, необходимые для создания предприятия. V_t предполагается случайным процессом, заданным на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}, \mathbf{P})$, где $\mathcal{F}_t$ характеризует информацию, доступную инвестору к моменту времени t. В этой модели предполагается, что: 1) решение об инвестировании принимается на основе наблюдаемой информации о рыночных ценах на затрачиваемые ресурсы и выпускаемую продукцию, носящей стохастический характер; 2) в каждый момент времени инвестор может либо принять решение об инвестировании, либо отложить это решение до получения новой информации; 3) инвестиции являются мгновенными и необратимыми, т. е. все инвестиции делаются в один момент времени и после этого уже не могут быть изъяты из проекта и использованы для других целей.

Задачей инвестора является оценка проекта и выбор соответствующего момента инвестирования. В теории реальных опционов существуют два различных подхода к этой задаче (см. [1]).

При первом подходе в качестве оценки проекта принимается максимум чистого приведенного дохода (NPV):

$$\max_{\tau} \mathbf{E}\,(V_\tau - I)e^{-\rho\tau} = \mathbf{E}\,(V_{\tau^*} - I)e^{-\rho\tau^*}, \tag{1}$$

где $\mathbf{E}$ обозначает математическое ожидание (по исходной вероятностной мере $\mathbf{P}$), максимум берется по всем моментам остановки (относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_t$), а ρ — экзогенно заданная норма дисконта. Оптимальный момент остановки в (1) рассматривается как момент инвестирования.

При втором подходе в качестве оценки проекта берется цена опциона американского типа на приобретение некоторого актива по заранее оговоренной цене. При этом в качестве момента инвестирования выступает момент предъявления этого опциона. В рамках такого подхода инвестиционному проекту ставится в соответствие ценная бумага S, торгуемая на финансовом рынке, стоимость которой S_t полностью коррелирована с приведенной стоимостью проекта V_t.

Для определения цены такого «реального опциона» используются два различных (хотя и связанных между собой) способа.

Первый способ основан на результатах классической теории финансовых опционов. На BS рынке (см., например, [2]) с безрисковой ставкой доходности r и рисковым активом S, динамика которого $S_t = S_t(\mu)$ описывается геометрическим броуновским движением с темпом роста μ, волатильностью σ и потоком дивидендов с темпом δ, рассматривается опцион американского типа с платежным обязательством $f_t = g(S_t) = (S_t - I)^+$. Хорошо известно, что цена такого опциона равна $\sup_\tau \mathbf{E}_Q e^{-r\tau} f_\tau$, где sup берется по всем моментам остановки, а $\mathbf{E}_Q$ — математическое ожидание по мартингальной (риск-нейтральной) мере Q с учетом дивидендов, относительно которой процесс $\{S_t e^{-(r-\delta)t},\, t \geqslant 0\}$ является мартингалом. После соответствующей замены меры можно показать (см., например, [2], [3]), что цена опциона в этом случае равна

$$\sup_{\tau} \mathbf{E} e^{-r\tau} g(S_\tau(r - \delta)), \tag{2}$$

где математическое ожидание считается по исходной мере, а в качестве динамики распределения актива S берется геометрическое броуновское движение с темпом роста $\rho - \delta$ и волатильностью σ. Отметим, что упомянутая формула для цены американского опциона справедлива и для произвольной функции платежа $g(S)$.

Второй способ (см., например, [1]) основан на применении Contingent Claims Analysis и рассмотрении реплицирующего портфеля на упоминавшемся выше BS рынке. При этом цена реального опциона определяется как решение следующей краевой задачи со свободной границей (задачи Стефана):

$$\begin{aligned} &0,5\sigma^2 S^2 F^{''}(S) + (r-\delta)SF^{'}(S) - rF(S) = 0, \qquad 0 < S < S^*;\\ &F(S^*) = g(S^*);\\ &F'(S^*) = g'(S^*). \end{aligned} \tag{3}$$

Обычно принимается, что решение задачи Стефана (3) автоматически дает и решение задачи оптимальной остановки (2). Это действительно так для классического американского опциона продажи с функцией платежа $g(S) = (S - I)^+$, однако для произвольной функции платежа вопрос о соотношении решений задач (2) и (3) остается открытым. В более общей постановке, как соотносятся между собой задача оптимальной остановки диффузионных процессов и связанная с ней задача Стефана (со свободной границей)?

Подобные вопросы возникают (и даже более актуальны) в случае, когда опционы рассматриваются на многомерных активах, поскольку решение задачи со свободной границей является зачастую единственным конструктивным методом нахождения решения задачи оптимальной остановки.

Развивается новый (вариационный) подход к решению задач оптимальной остановки диффузионных процессов как альтернатива традиционному подходу, основанному на решении задачи Стефана. В основе этого подхода лежит идея варьирования функционала, определяемого на множествах из заданного класса «областей продолжения». Подробное изложение вариационного подхода приведено в [4]. В рамках предложенного подхода показано, что условие гладкого склеивания является необходимым условием экстремума первого порядка и построены естественные примеры, в которых решение задачи Стефана существует, но не дает решение задачи оптимальной остановки.

С помощью вариационного подхода решена задача оптимальной остановки двумерного геометрического броуновского движения с нелинейной функцией выплат.

Полученный результат применяется для исследования модели поведения инвестора в условиях неопределенности при наличии налоговых льгот.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 07-01-00541, 08-06-00154).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dixit A. K.*, *Pindyck R. S.* Investment under Uncertainty. Princeton: Princeton University Press, 1994.
2. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Том 2. Теория. М.: ФАЗИС, 1998,
3. *Шепп Л. А.*, *Ширяев А. Н.* Новый взгляд на расчеты «Русского опциона». — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 130–149.
4. *Аркин В. И.*, *Сластников А. Д.* Вариационный подход к задачам оптимальной остановки диффузионных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, в. 3, с. 516–533.