А. А. Гущин (Москва, МИАН). **О максимизации робастной полезности со штрафной функцией.**

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $L^0(\mathbf{P})$ — пространство классов эквивалентности (относительно равенства $\mathbf{P}$-п. н.) действительных случайных величин. Под функционалом робастной полезности со штрафной функцией понимается функционал

$$L^0(\mathbf{P}) \ni \xi \rightsquigarrow \inf_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}} \Big[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(x+\xi) + \gamma(\mathbf{Q})\Big]. \tag{1}$$

Здесь число x интерпретируется как начальный капитал инвестора, а случайная величина ξ — как его прибыль; $U\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ — монотонно неубывающая вогнутая функция (функция полезности), причем $U(x) = -\infty$ при $x < 0$ и $U(x) \in \mathbf{R}$ при $x > 0$; математическое ожидание полагается равным $-\infty$, если оно не определено; $\mathcal{Q}$ — непустое выпуклое подмножество множества вероятностных мер на $(\Omega, \mathcal{F})$, абсолютно непрерывных относительно $\mathbf{P}$, содержащее хотя бы одну меру, эквивалентную $\mathbf{P}$; штрафная функция $\gamma\colon \mathcal{Q} \to \mathbf{R}_+$ удовлетворяет следующим свойствам: функция γ выпукла, $\inf_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}} \gamma(\mathbf{Q}) = 0$, множество случайных величин $\{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}\colon \mathbf{Q} \in \mathcal{Q},\, \gamma(\mathbf{Q}) \leqslant c\}$ замкнуто в $L^1(\mathbf{P})$ и равномерно интегрируемо по мере $\mathbf{P}$ для любого $c \geqslant 0$.

Пусть $\mathcal{A}$ — выпуклый конус в $L^0(\mathbf{P})$, интерпретируемый как множество прибылей инвестора, отвечающих всем его возможным стратегиям. В дальнейшем исключается тривиальный случай, когда для любого $N > 0$ найдется такая $\xi \in \mathcal{A}$, что $\xi \geqslant N$. Цель инвестора — максимизировать по множеству $\mathcal{A}$ функционал (1). Соответственно положим

$$u(x) = \sup_{\xi\in\mathcal{A}} \inf_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}} \Big[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(x+\xi) + \gamma(\mathbf{Q})\Big], \qquad x > 0.$$

В наших предположениях либо $u(x) \equiv +\infty$ при $x > 0$, либо $u(x)$ $(x > 0)$ — монотонно неубывающая вогнутая функция с конечными значениями. В обоих случаях имеет место представление

$$u(x) = \min_{y\geqslant 0} [v(y) + xy], \qquad x > 0, \tag{2}$$

где $v\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая полунепрерывная снизу функция. Цель данного сообщения — представить функцию v через решение некоторой (дуальной) оптимизационной задачи.

Теорема. *Положим* $\mathcal{C} = (\mathcal{A} - L^0_+(\mathbf{P})) \cap L^\infty(\mathbf{P})$, $\mathcal{D} = \{\eta \in L^0_+(\mathbf{P})\colon \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \eta\xi \leqslant 1$ *для любой* $\xi \in (1+\mathcal{C}) \cap L^\infty_+(\mathbf{P})\}$. *При сделанных выше предположениях имеет место представление* (2), *где*

$$v(y) = \min_{\eta\in\mathcal{D},\, \mathbf{Q}\in\mathcal{Q}} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} V\left(\frac{y\eta}{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}}\right) + \gamma(\mathbf{Q})\right], \quad V(y) = \sup_{x\geqslant 0} [U(x) - xy], \qquad y \geqslant 0.$$

Задачу максимизации робастной полезности со штрафной функцией (включая вопросы существования оптимальной стратегии и описания оптимальной прибыли) рассмотрел А. Шид в работе [1]. Условия нашей теоремы являются более общими по сравнению с [1], а также с другими работами, где рассматривались частные случаи рассматриваемой задачи — задача максимизации робастной полезности $(\gamma \equiv 0)$ и задача максимизации полезности $(\mathcal{Q} = \{\mathbf{P}\})$, см. библиографию в [1].

Работа частично поддержана РФФИ, проект № 08–01–91205.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schied A.* Optimal investments for risk- and ambiguity-averse preferences: a duality approach. — Finance Stochast., 2007, v. 11, p. 107–129.