К. Ю. Волкова, Я. Ю. Никитин (Санкт-Петербург, СПбГУ). **Критерии нормальности, основанные на характеризации Галамбоша–Симонелли.**

В 1964 г. Л. Шепп [2] обнаружил, что если X и Y — две независимые нормальные случайные величины со средним нуль и некоторой дисперсией $\sigma^2 > 0$, то и случайная величина $k(X,Y) := 2XY/\sqrt{X^2+Y^2}$ имеет снова распределение $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ (свойство Шеппа). Недавно Я. Галамбош и И. Симонелли [1] доказали, что свойство $X \overset{d}{=} k(X,Y)$ характеризует центрированный нормальный закон в широком классе распределений. Эта характеризация позволяет построить новые критерии нормальности.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые наблюдения с нулевым средним и функцией распределения (ф. р.) F, а F_n — эмпирическая ф. р., построенная по этим наблюдениям. Нас интересует проверка сложной гипотезы H_0: $F \in \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ при неизвестной дисперсии σ^2 против альтернатив H_1, при которых гипотеза H_0 неверна. Построим U-статистическую эмпирическую ф. р.

$$G_n(t) = \frac{1}{C_n^2} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{1}\{k(X_i, X_j) < t\}, \qquad t \in \mathbf{R}^1.$$

Рассмотрим две статистики. Первая из них имеет вид $I_n = \sqrt{n} \int_{\mathbf{R}^1} (G(t) - F_n(t))\, dF_n(t)$. Вторая основана на равномерном расстоянии: $D_n = \sqrt{n} \sup_{t \in \mathbf{R}^1} |G_n(t) - F_n(t)|$. Статистика I_n асимптотически эквивалентна невырожденной U-статистике и потому асимптотически нормальна. Статистика D_n сходится по распределению к супремуму модуля центрированного гауссовского процесса со сложной, но явно выписываемой ковариацией [3].

Мы находим логарифмическую асимптотику больших уклонений обеих статистик при нулевой гипотезе, доказывая соотношения

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}\{I_n > a\sqrt{n}\} = -6a^2(1 + o(1)), \qquad a \to 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}\{D_n > a\sqrt{n}\} = -2a^2(1 + o(1)), \qquad a \to 0.$$

Это позволяет вычислить локальную бахадуровскую эффективность обеих статистик для ряда параметрических альтернатив. Например, для сдвиговой и скошенной альтернативы эффективности рассматриваемых статистик равны, соответственно, $3/\pi \approx 0{,}955$ и $2/\pi \approx 0{,}637$. Питменовская эффективность имеет те же значения.

Работа поддержана РФФИ, проект № 07–01–00159, и грантом научной школы 638.2008.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Galambos J.*, *Simonelli I.* Comments on a recent limit theorem of Quine. — Statist. Probab. Lett., 2003, v. 63, p. 89–95.
2. *Shepp L.* Normal functions of normal random variables. — SIAM Rev., 1964, v. 6, p. 459–460.
3. *Silverman B. W.* Convergence of a class of empirical distribution functions of dependent random variables. — Ann. Probab., 1983, v. 11, p. 745–751.