С. А. Загребина, Н. П. Соловьева (Челябинск, ЮУрГУ). **Начально-конечная задача для линейных эволюционных уравнений соболевского типа на графе.**

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства; операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathrm{Cl}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M сильно (L,p)-секториален справа и слева [1]. И пусть относительный спектр $\sigma^L(M) = \sigma^L_{in}(M) \cup \sigma^L_{ex}(M)$, причем $\sigma^L_{in}(M)$ содержится в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{C}$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$ и $\partial\Omega \cap \sigma^L(M) = \varnothing$. Тогда существуют проекторы

$$P_{in} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \quad Q_{in} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}),$$

где контур $\gamma = \partial\Omega$ таков, что операторы $L \in \mathcal{L}(\ker P_{in};\ker Q_{in}) \cap \mathcal{L}(\mathrm{im}P_{in};\mathrm{im}Q_{in})$, $M \in \mathrm{Cl}(\ker P_{in};\ker Q_{in}) \cap \mathrm{Cl}(\mathrm{im}P_{in};\mathrm{im}Q_{in})$.

Рассмотрим проектор $P_{ex} = P - P_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, возьмем $T \in \mathbf{R}_+$, u_0, $u_T \in \mathfrak{U}$ и поставим начально-конечную задачу [2]

$$P_{ex}(u(0) - u_0) = 0, \quad P_{in}(u(T) - u_T) = 0. \tag{1}$$

Пусть теперь $\mathbf{G} = G(\mathfrak{V};\mathfrak{E})$, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ — множество ребер, есть конечный связный ориентированный граф, причем каждое его ребро E_i имеет длину $l_i \in \mathbf{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j \in \mathbf{R}_+$. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим линейные уравнения в частных производных

$$\lambda u_{jt} - u_{jtxx} = \beta u_{jxx} - \alpha u_{jxxxx} + \gamma u_j + f_j. \tag{2}$$

Нас интересуют решения задачи (1), (2), удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \tag{3}$$

где $E_j, E_k \in E^\alpha(V_i)$, $E_m, E_n \in E^\omega(V_i)$ ($E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ — множество ребер с началом (концом) в вершине V_i);

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0, \tag{4}$$

где $E_j, E_k \in E^\alpha(V_i)$, $E_m, E_n \in E^\omega(V_i)$;

$$u_{jxx}(0,t) = u_{kxx}(0,t) = u_{mxx}(l_m,t) = u_{nxx}(l_n,t), \tag{5}$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jxxx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kxxx}(l_k,t) = 0. \tag{6}$$

Теорема. *При любых $\alpha \in \mathbf{R}_+$, $\beta,\gamma,\lambda \in \mathbf{R}$, $T \in \mathbf{R}$, любой вектор-функции $f \in C^1([0,T],\mathfrak{F})$ и любых начальных, конечных значениях u_0, $u_T \in \mathfrak{U}$, существует единственное решение задачи* (1) *для уравнения* (2) *с условиями* (3)–(6) *вида*

$$\begin{aligned} u(t) = &\sum_{\mu_k \in \sigma^L_{in}} \left[e^{\mu_k t}\langle u_T, \varphi_k\rangle\varphi_k - \frac{1}{\lambda+\lambda_k}\int_t^T e^{\mu_k(t-s)}\langle f^{in}(s),\varphi_k\rangle\varphi_k ds\right] \\ &+ \sum_{\mu_k \in \sigma^L_{ex}} \left[e^{\mu_k t}\langle u_0, \varphi_k\rangle\varphi_k - \frac{1}{\lambda+\lambda_k}\int_0^t e^{\mu_k(t-s)}\langle f^{ex}(s),\varphi_k\rangle\varphi_k ds\right] \\ &+ \sum_{\lambda+\lambda_k=0} \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\beta\lambda_k + \alpha\lambda_k^2 - \gamma}. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sviridyuk G. A.*, *Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo: VSP, 2003.
2. *Загребина С. А.* О задаче Шоуолтера–Сидорова. — Изв. вузов, математика, 2007, № 3, с. 22–28.