Г. А. Свиридюк, А. С. Шипилов (Челябинск, ЮУрГУ). **Об устойчивости решений одной неклассической модели.**

Система уравнений Осколкова [1]

$$(\lambda - \nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\,\nabla)v - \nabla p, \quad \nabla\, v = 0$$

моделирует динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости. Прообразом данной модели служит нефть с высоким содержанием парафина. Основной проблемой при транспортировке такой нефти по трубопроводам является неустойчивость ее течений относительно начальных данных. Мы исследуем устойчивость и неустойчивость модели, рассматривая ее одномерные аналоги, определенные на графе.

Итак, пусть $\mathbf{G} = \{\mathfrak{V}, \mathfrak{E}\}$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ — множество ребер, причем каждому ребру E_j поставлено в соответствие два числа l_j, $d_j \in \mathbf{R}_+$, которые можно трактовать как длину и площадь поперечного сечения ребра соответственно. На каждом ребре E_j определено одномерное уравнение Осколкова

$$\lambda v_{jt} - v_{jtxx} = \nu v_{jxx} - v_{jx}v_j - \alpha v_j, \tag{1}$$

где $x \in (0, l_j)$ — натуральный параметр, а $t \in \mathbf{R}$ — время. Наша цель — изучить устойчивость решений $v = (v_1, v_2, \ldots, v_j, \ldots)$ системы (1), удовлетворяющих следующим условиям в вершинах графа:

$$v_j(0,t) = v_k(0,t) = v_m(l_m,t) = v_n(l_n,t), \tag{2}$$

где $E_j, E_k \in \mathfrak{E}^\alpha(V_i)$, $E_m, E_n \in \mathfrak{E}^\omega(V_i)$, $\mathfrak{E}^\alpha$ и $\mathfrak{E}^\omega$ — множества выходящих из вершины V_i и входящих в вершину V_i ребер соответственно; и

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}^\alpha(V_i)} d_j v_{jx}(0,t) = \sum_{E_k \in \mathfrak{E}^\omega(V_i)} d_j v_{kx}(l_k,t). \tag{3}$$

Определив операторы

$$\langle Lv, u\rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (v_{jx}u_{jx} + \lambda v_j u_j)\,dx,$$

$$\langle Mv, u\rangle = -\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (\nu v_{jx}u_{jx} + \alpha v_j u_j)\,dx, \quad \langle N(v), u\rangle = -\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} v_{jx}v_j u_j\,dx,$$

мы редуцируем модель (1)–(3) аналогично [2] к полулинейному операторному уравнению соболевского типа

$$L\dot v = Mv + N(v), \tag{4}$$

где операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$, $N \in \mathrm{C}^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$, пространство $\mathfrak{U} = \{u\colon\ u_j \in W_2^1(0, l_j)$ и выполнено условие (2)$\}$, а пространство $\mathfrak{F}$ сопряжено к $\mathfrak{U}$ относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ из пространства $\mathbf{L}_2 = \{u\colon\ u_j \in L_2(0, l_j)\}$.

В [2] начато исследование устойчивости и неустойчивости нулевого решения абстрактного полулинейного уравнения соболевского типа вида (4) посредством первого метода Ляпунова (он же — метод Адамара–Перрона, он же — метод изучения устойчивости по линейному приближению (4)). В частности, были выделены следующие условия.

(A1) Оператор M (L, p) ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbf{N}$.

(A2) L-спектр оператора M: $\sigma^L(M) = \sigma_e^L(M) \cup \sigma_r^L(M) \neq \varnothing$, где $\sigma_{e(r)}^L(M) = \{\mu \in \sigma^L(M)\colon\ \mathrm{Re}\,\mu < 0\ (\mathrm{Re}\,\mu > 0)\}$.

(A3) Оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $N(0)=0$, $N'_0=\mathbf{O}$, где $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, N'_u – производная Фреше оператора M в точке $u \in \mathfrak{U}$.

(A4) Фазовое пространство $\mathfrak{M}$ уравнения (1) таково, что $0 \in \mathfrak{M}$ и существует окрестность $\mathfrak{O}_0 \subset \mathfrak{M}$, C^∞-диффеоморфно проектирующаяся вдоль $\mathfrak{U}^0$ на окрестность $\mathfrak{O}_0^1 \subset \mathfrak{U}^1$.

Терминология, используемая здесь, формализована в [3]. Выполнение условий (A1), (A2) определяет существование расщепления фазового пространства $\mathfrak{U}^1$ уравнения $L\dot{u}=Mu$ в прямую сумму $\mathfrak{U}^1=\mathfrak{U}^s \oplus \mathfrak{U}^u$ экспоненциально устойчивого и неустойчивого инвариантных пространств этого уравнения. Напомним некоторые понятия. Вектор-функция $v \in C^\infty((-\tau,\tau);\mathfrak{U})$ называется *решением* уравнения (4), если оно удовлетворяет ему. Решение $v=v(t)$ уравнения (4) называется *решением задачи Коши*

$$v(0)=v_0, \tag{5}$$

для него (короче, *решением задачи* (4), (5)), если оно удовлетворяет условию (5).

О п р е д е л е н и е 1. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (4), если (i) любое решение $v=v(t)$ уравнения (4) лежит в $\mathfrak{P}$ поточечно, т. е. $v(t) \in \mathfrak{P}$ для любого $t \in (-\tau,\tau)$; (ii) при любом $v_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (4), (5).

Фазовое пространство уравнения (4) изучено в [4]. Показано, что оно есть объединение двух непересекающихся компонент, одна из которых удовлетворяет усаловию (A4).

О п р е д е л е н и е 2. Множество $\mathfrak{M}^s=\{v_0=\mathfrak{O}_0\colon\ \|P_s v_0\|_{\mathfrak{U}} \leqslant R_1,\ \|v(t,v_0)\|_{\mathfrak{U}} \leqslant R_2,\ t \in \mathbf{R}_+\}$ ($\mathfrak{M}^u=\{v_0 \in \mathfrak{O}_0\colon\ \|P_u v_0\|_{\mathfrak{U}} \leqslant R_1,\ \|v(t,v_0)\|_{\mathfrak{U}} \leqslant R_2,\ t \in \mathbf{R}_-\}$) такое, что (i) $\mathfrak{M}^{s(u)}$ C^∞-диффеоморфно замкнутому шару в $\mathfrak{U}^{s(u)}$ с центром в начале координат радиуса R_1; (ii) $\mathfrak{M}^{s(u)}$ касается $\mathfrak{U}^{s(u)}$ в начале координат; (iii) при любом $v_0 \in \mathfrak{M}^{s(u)}$ $\|v(t,v_0)\|_{\mathfrak{U}} \to 0$ при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), называется *устойчивым* (*неустойчивым*) инвариантным многообразием уравнения (4).

Здесь $P_{s(u)}$ обозначает проектор вдоль $\mathfrak{U}^{u(s)} \oplus \mathfrak{U}^0$ на $\mathfrak{U}^{s(u)}$, а $v(t,v_0)$ обозначено решение задачи (4), (5). Опираясь на результаты [4], можно получить следующий результат.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (A1)–(A4). *Тогда существуют устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения* (1). *Причем если для некоторого* $v_0 \in \mathfrak{O}_0$ *имеет место* $\|P_{e(r)}v_0\|_{\mathfrak{U}} \leqslant R_1$ *и* $\|v(t,v_0)\|_{\mathfrak{U}} \leqslant R_2$ *при* $t \to +\infty$ *или при* $t \to -\infty$, *то* $v_0 \in \mathfrak{M}^s \cup \mathfrak{M}^u$.

Здесь уравнения (1) отличаются от рассмотренных в [4], но и для них справедливо следующее утверждение.

Лемма. (*i*) *При всех* $\lambda,\nu \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ *операторы* $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, *причем оператор* M $(L,0)$*-ограничен.* (*ii*) *Оператор* $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Нетрудно показать, что L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M имеет следующий вид: $\sigma^L(M)=\{\mu_k=(\nu\lambda_k+\alpha)/(\lambda_k+\lambda)\colon\ k \in \mathbf{N}\setminus\{\lambda_l+\lambda=0\}\}$, где λ_k — собственные значения оператора $\langle Av,u\rangle=\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j\int_0^{l_j} v_{jx}u_j\,dx$. Поэтому, используя [5], можно получить следующий результат.

Теорема 2. *При любых* $\lambda \in \mathbf{R}$, $\nu,\alpha \in \mathbf{R}_+$ *существует конечномерное неустойчивое и бесконечномерное устойчивое инвариантные многообразия модели* (1)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осколков А. П.* Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С. Л. Соболева. — Записки науч. семинара Лен. отд. мат. ин-та, 1991, т. 198, с. 31–48.
2. *Китаева О. Г.*, *Свиридюк Г. А.* Устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения Осколкова. — Неклас. уравн. матем. физики. Новосибирк: ИМ СО РАН, 2005, с. 261–267.
3. *Sviridyuk G. A.*, *Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo: VSP, 2003.
4. *Свиридюк Г. А.*, *Шеметова В. В.* Фазовое пространство одной неклассической модели. — Изв. вузов, матем., 2005, № 11, с. 47–51.
5. *Свиридюк Г.А.*, *Келлер А.В.* Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева. — Изв. вузов, матем., 1997, № 5, с. 60–68.