А. А. З а м ы ш л я е в а (Челябинск, ЮУрГУ)**. Решение одного уравнения соболевского типа на графе.**

В последнее время теория графов привлекает все более пристальное внимание специалистов различных областей знания. Давно известны тесные контакты теории графов с топологией, теорией групп и теорией вероятностей. За последние годы тематика теории графов стала еще более разнообразной. Краевые и начально-краевые задачи для уравнений на графах начали изучать в конце прошлого века практически одновременно в разных регионах нашей планеты. Г. А. Свиридюк [1] впервые рассмотрел начально-краевую задачу для полулинейного уравнения соболевского типа первого порядка на графе. Работа, представленная данным сообщением, посвящена изучению уравнения Буссинеска–Лява [2]

$$(\lambda-\Delta)u_{tt}=\alpha(\Delta-\lambda')u_t+\beta(\Delta-\lambda'')u, \tag{1}$$

описывающего продольные колебания упругого стержня, где параметры $\lambda,\lambda',\lambda''\in\mathbf{R}$, $\alpha>0$, $\beta>0$ характеризуют среду, причем отрицательные значения параметра λ не противоречат физическому смыслу. Пусть $G=G(\mathfrak{V};E)$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V}=\{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E}=\{E_j\}$ — множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга имеет длину $l_j>0$ и толщину $d_j>0$. На графе G рассмотрим уравнения

$$\lambda u_{jtt}-u_{jxxtt}=\alpha(u_{jxxt}-\lambda' u_{jt})+\beta(u_{jxx}-\lambda'' u_j)\quad \text{для всех}\quad x\in(0,l_j),\quad t\in\mathbf{R}. \tag{2}$$

Для уравнений (2) в каждой вершине V_i зададим краевые условия

$$\sum_{E_j\in E^{\alpha}(V_i)} d_j u_{jx}(0,t)-\sum_{E_k\in E^{\omega}(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t)=0, \tag{3}$$

$$u_s(0,t)=u_j(0,t)=u_k(l_k,t)=u_m(l_m,t),\quad \text{для}\quad E_s,E_j\in E^{\alpha}(V_i),\quad E_k,E_m\in E^{\omega}(V_i), \tag{4}$$

которые являются аналогами законов Кирхгоффа. Здесь $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначает множество дуг с началом (концом) в вершине V_i. Условие (3) означает, что поток через каждую вершину должен равняться нулю, а условие (4) — что решение в каждой вершине должно быть непрерывным. В частном случае, когда граф G состоит из единственной нециклической дуги, условие (4) исчезает, а условие (3) превращается в однородное условие Неймана. Если дополнить (3), (4) начальным условием

$$u_j(x,0)=u_{0j}(x),\quad u_{jt}(x,0)=u_{1j}(x),\quad \text{для всех}\quad x\in(0,l_j), \tag{5}$$

то мы получим задачу Коши–Неймана для уравнения (1). Отметим, что данная задача ранее не рассматривалась даже в случае, когда граф G состоит из единственной дуги.

Задачу (3)–(5) для уравнения (2) удалось редуцировать к задаче Коши

$$u(0)=u_0,\quad u'(0)=u_1, \tag{6}$$

для линейного уравнения соболевского типа второго порядка

$$Au''=B_1u'+B_0u \tag{7}$$

и примененить абстрактные результаты о морфологии фазового пространства такого уравнения [3]. В частности, показано выполнение всех условий, достаточных для существования фазового пространства и построения семейства (в том числе и вырожденных) M,N-функций уравнения (7). Кроме того, в явном виде получено решение исходной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свиридюк Г. А.* Уравнения соболевского типа на графах. — Некласс. уравн. матем. физики. Новосибирк: ИМ СО РАН, 2002, с. 221–225.
2. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
3. *Замышляева А. А.* Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка. — Вычислит. технологии, 2003, т. 8, № 4, с. 45–54.