В. А. К а л и т в и н (Липецк, ЛГПУ). **О численном решении линейных уравнений с частными интегралами.**

К частным случаям интегрального уравнения

$$x(t,s)=\int_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\tau+\int_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma \\ +\iint_D n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\tau\,d\sigma+f(t,s)\equiv(L+M+N)x(t,s)+f(t,s), \quad (1)$$

где $t\in T=[a,b]$, $s\in S=[c,d]$, $D=T\times S$, l, m, n и f — заданные и измеримые на $D\times T$, $D\times S$, $D\times D$ и D соответственно функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега, приводятся различные задачи механики сплошных сред [1]–[4]. Найти решение уравнения (1) в явном виде удается в редких случаях, поэтому важное значение имеют численные методы решения этого уравнения. В настоящее время хорошо разработаны численные методы решения обычных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Интегральное уравнение (1) принципиально отличается от интегральных уравнений Фредгольма, т. к. операторы L и M не являются компактными в пространстве $C(D)$ — непрерывных на D функций [1], [3]. В связи с этим требуются обоснованные схемы численного решения уравнения (1). Одна из таких схем рассматривается в данном сообщении.

Предполагается, что заданные функции непрерывны, а уравнение (1) обратимо в $C(D)$. Обратимость уравнения (1) в $C(D)$ равносильна обратимости в $C(D)$ двух более простых уравнений $(I-L)x=f$, $(I-M)x=f$ и интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t,s)=\iint_D h(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\tau\,d\sigma+g(t,s). \quad (2)$$

При этом операторы $(I-L)^{-1}$ и $(I-M)^{-1}$ допускают представления

$$(I-L)^{-1}x(t,s)=x(t,s)+\int_T r_l(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\tau,$$
$$(I-M)^{-1}x(t,s)=x(t,s)+\int_S r_m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma,$$

где r_l и r_m — непрерывные на $D\times T$ и $D\times S$ соответственно резольвентные ядра, ядро h непрерывно и совпадает с ядром интегрального оператора $(I-M)^{-1}(I-L)^{-1}(LM+N)$, а функция $g=(I-M)^{-1}(I-L)^{-1}f$ [5].

Если резольвентные ядра r_l и r_m удается найти, то ядро h выражается через ядра l, m, n, r_l и r_m, а уравнение (1) эквивалентно интегральному уравнению Фредгольма второго рода (2) с непрерывным ядром h и непрерывной функцией g. Для численного решения уравнения (2) могут быть использованы хорошо известные численные методы решения линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Отметим, что резольвентные ядра $r_l(t,s,\tau)$ и $r_m(t,s,\sigma)$ находятся в явном виде [4], если $l(t,s,\tau)$ и $m(t,s,\sigma)$ — вырожденные ядра:

$$l(t,s,\tau)=\sum_{i=1}^{p} l_i(t,s)a_i(\tau), \quad m(t,s,\sigma)=\sum_{j=1}^{q} m_j(t,s)b_j(\sigma).$$

В этом случае можно записать формулу и для нахождения непрерывного ядра $h(t,s,\tau,\sigma)$, а обратимое в $C(D)$ уравнение второго рода (2) с известными непрерывными функциями $h(t,s,\tau,\sigma)$ и $g(t,s)$ численно решать методом механических квадратур.

Если $l(t, s, \tau)$ и $m(t, s, \sigma)$ — непрерывные, но не вырожденные ядра, то они сколь угодно точно приближаются вырожденными ядрами $\widetilde{l}$ и $\tilde{m}$, а обратимое уравнение (1) заменяется уравнением (1) с $\widetilde{l}$ и $\widetilde{m}$ вместо l и m. Получающееся при этом уравнение с непрерывными вырожденными ядрами $\widetilde{l}$ и $\widetilde{m}$ будет обратимым в $C(D)$ в силу устойчивости обратимости относительно достаточно малых возмущений, а для его численного решения может быть использована описанная выше процедура.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Appell J. M.*, *Kalitvin A. S.*, *Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York: Marcel Dekker, 2000, 560 p.
2. *Appell J.*, *Kalitvin A. S.*, *Nashed M. Z.* On some partial integral equations arising in the mechanics of solids. — Zeitschr. Ang. Math. Mech., 1999, b. 79, № 10, s. 703–713.
3. *Калитвин А. С.* Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ, 2000, 252 с.
4. *Калитвин А. С.*, *Калитвин В. А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра–Фредгольма с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2006, 177 с.
5. *Калитвин А. С.* Об одном классе интегральных уравнений в пространстве непрерывных функций. — Дифференциальные уравнения, 2006, т. 42, № 9, с. 1194–2000.