Н. А. К о л о д и й (Волгоград, ВолГУ). **О стохастических интегралах на плоскости по сильным мартингальным ядрам.**

Предположим, что $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство, $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_z, z \in \mathbf{R}_+^2)$ — двупараметрическое семейство σ-алгебр, удовлетворяющее «обычным» условиям; $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}$ обозначают σ-алгебры $\mathbf{F}$-прогрессивно измеримых и $\mathbf{F}$-предсказуемых подмножеств $\mathbf{R}_+^2 \times \Omega$. Определим класс подмножеств $\mathbf{R}_+^2 \times \mathbf{R}_+^2 \times \Omega$

$$\widetilde{\mathcal{T}} = \{C \mid C \subset \mathbf{R}_+^2 \times \mathbf{R}_+^2 \times \Omega,\ C \cap (\mathbf{R}_+^2 \times [0,z] \times \Omega) \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+) \otimes \mathcal{B}([0,z]) \otimes \mathcal{F}_z \quad \forall z\}.$$

Пусть $\mathcal{M}_S^2$ — пространство двупараметрических сильных квадратично интегрируемых мартингалов [1].

При исследовании стохастических интегральных уравнений Вольтерра на плоскости возникает необходимость изучить свойства стохастического интеграла вида

$$\eta(z) = \int_{]0,z]} \beta(z,x)\mu(z,dx), \qquad z \in \mathbf{R}_+^2,$$

где поле $\mu \in \widetilde{\mathcal{T}}|\mathcal{B}(\mathbf{R})$, $\mu(z,\cdot) \in \mathcal{M}_S^2$ для каждого $z \in \mathbf{R}_+^2$, β — $\mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2) \otimes \mathcal{P}|\mathcal{B}(\mathbf{R})$-измеримая функция, $\mathbf{E}\int_{]0,z]} \beta^2(z,u)\overline{\mu}(z,du) < \infty$, $\overline{\mu}(z,u) = \langle \mu(z,\cdot)\rangle_u$ — квадратическая вариация мартингала $\mu(z,\cdot)$ на прямоугольнике $[0,u]$ [2].

Рассмотрим условие ($\mathbf{H}$): предположим, что существует такое число $p > 1$, возрастающая положительная функция $(\varphi(t))_{t \geqslant 0}$ и измеримые случайные поля $\Lambda(z,x)$ и $\overline{\beta}(z,x)$ со значениями в $\mathbf{R}_+$, что:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\varphi(t)\,dt}{t^{1+2/p}} < \infty; \quad 0 \leqslant \overline{\beta}(z,x) \leqslant \overline{\beta}(z',x) \quad \text{для} \quad z \leqslant z';\\
&0 \leqslant \Lambda(y,]u,v]) \leqslant \Lambda(z,]u,v]) \quad \text{для} \quad u < v, \quad y \leqslant z;\\
&\mathbf{E}\,\Lambda(z,]0,z]) < \infty; \quad \langle \mu(z,\cdot)\rangle_{]u,v]} \leqslant \Lambda(z,]u,v]);\\
&\langle \mu(z,\cdot) - \mu(z',\cdot)\rangle_{]x,y]} \leqslant \Lambda(z \vee z',]x,y])\varphi^2(|z-z'|) \quad \text{для} \quad x \leqslant y;\\
&|\beta(z,x)| \leqslant \overline{\beta}(z,x); \quad |\beta(z,x) - \beta(y,x)| \leqslant \overline{\beta}(z \vee y,x)\varphi(|z-y|);\\
&\mathbf{E}\biggl(\int_{]0,z]} \overline{\beta}^2(z,x)\Lambda(z,dx)\biggr)^{p/2} < \infty.
\end{aligned} \tag{1}$$

При условии ($\mathbf{H}$) в работе [3] определены некоторые типы стохастических интегралов по сильным мартингальным ядрам и их квадратическим вариациям, доказана теорема о существовании регулярных модификаций и получены неравенства для моментов равномерных норм и модулей непрерывности таких интегралов. Указанные результаты применяются в работе [4] для доказательства теорем о существовании и единственности решений стохастических интегральных уравнений Вольтерра на плоскости.

Отметим, что стохастический интеграл по сильному квадратично интегрируемому мартингалу, подынтегральная функция и интегратор которого зависят от предела интегрирования, имеет нетривиальную конструкцию и не обладает мартингальными свойствами. Представляет интерес существование полей, удовлетворяющих условию ($\mathbf{H}$).

Далее приведем класс подынтегральных функций и интегрирующих ядер, удовлетворяющих этому условию.

Пусть: 1) $(W(x),\ x \in \mathbf{R}_+^2)$ — двупараметрическое винеровское поле; 2) $\alpha_x(\omega)$ и $\gamma_x(\omega)$ — $\mathcal{P}|\mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2)$-измеримые и локально ограниченные поля; 3) F: $\mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ и G: $\mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ — непрерывно дифференцируемые функции; 4) число $p > 1$ и модуль непрерывности $(\varphi(t))_{t \geqslant 0}$ удовлетворяют условию конечности интеграла $\int_0^1 \varphi(t)t^{-1-2/p}\,dt < \infty$.

Определим $\mu(z,x)=\int_{[0,x]}F(\varphi(|z-\alpha_y|))\,dW(y)$ и $\beta(z,x)=G(\varphi(|z-\gamma_x|))$. Тогда выполняется условие (**H**) с полями $\Lambda(z,x)$ и $\overline{\beta}(z,x)$ вида:

$$\Lambda(z,]u,v])=\int_{]u,v]}\max_{x\in[0,z]}\max\left\{F^2(\varphi(|x-\alpha_y|)),\Big(F'(\varphi(|x-\alpha_y|))\Big)^2\right\}dy,$$

$$\overline{\beta}(z,x)=\max_{y\in[0,z]}\max\{|G(\varphi(|y-\gamma_x|))|,|G'(\varphi(|y-\gamma_x|))|\}.$$

Условие (1) следует из неравенства

$$\int_{[0,z]}\overline{\beta}^2(z,x)\Lambda(z,dx)\leqslant z_1z_2\max_{y\in[0,z],\,x\in[0,\Gamma(z)]}\max\{|G(\varphi(|y-x|))|,|G'(\varphi(|y-x|))|,$$
$$F^2(\varphi(|y-x|)),[F'(\varphi(|y-x|))]^2\},$$

где z_1 обозначает первую, а z_2 — вторую компоненту вектора z.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гущин А. А.* К общей теории случайных полей на плоскости. — Успехи матем. наук., 1982, т. 372, № 6, с. 53–74.
2. *Гущин А. А.*, *Мишура Ю. С.* Неравенства Девиса и разложение Ганди для двупараметрических сильных мартингалов. I. — Теория вероятн. и матем. статистика, 1990, № 42, с. 27–35.
3. *Колодий Н. А.* Об условиях существования непрерывных справа модификаций стохастических интегралов на плоскости. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 4, с. 840–841.
4. *Колодий Н. А.* Уравнения Вольтерра на плоскости со стохастическими интегралами по сильным мартингалам. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2005, т. 12, в. 3, с. 659–661.